МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Штефан Н.І., Гнатейко Н.В., Федоров В.М.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

ПІДРУЧНИК

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів,
які навчаються за спеціальностями:
133 «Галузеве машинобудування»,
131 «Прикладна механіка»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *Зав'ялов В.Л., доктор технічних наук, професор Національного університету харчових технологій*

Джур Є.О., доктор технічних наук, професор Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара

Відповідальний редактор *Алексейчук Ольга Миколаївна*, канд. техн. наук, доц.

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.03.2020р.)

ПІДРУЧНИК

Електронне мережне навчальне видання

Штефан Наталія Іллівна, канд. техн. наук, доц.
Гнатейко Нонна Валентинівна, канд. техн. наук, доц.
Федоров Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доц.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

Теоретична механіка. Кінематика точки і твердого тіла [Електронний ресурс] : підручник для студентів спеціальностей: 133 «Галузеве машинобудування»; 131 «Прикладна механіка» / Штефан Н.І., Гнатейко Н.В., Федоров В.М. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 120 с.

В підручнику розглянуто всі розділи кінематики дисципліни «Теоретична механіка» в такій послідовності: спочатку викладено теоретичний матеріал, а потім представлено практичну частину, де надано методику розв'язування задач з даного розділу, а також серія задач з демонстраційним розв'язуванням, які супроводжено повним поясненням, після чого запропоновано задачі для самостійного розв'язування. Потім надано низку заходів для перевірки засвоєння знань: питання для самоконтролю, тестові запитання та тестові завдання. Теоретична частина підручника містить конкретну інформацію, вона не переобтяжена математичними доведеннями. Тестові запитання та завдання створені для кожного розділу таким чином, щоб це було цікаво студентам. Підручник рекомендовано студентам всіх спеціальностей, де вивчається «Теоретична механіка».

ЗМІСТ

Передмова

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух точки або твердого тіла з геометричної точки зору незалежно від діючих на них сил. Вона досліджує залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Вивчаючи рух твердого тіла, слід знати, відносно якої системи відліку розглядається цей рух. Як відомо, рухи всіх досліджуваних об'єктів можуть відбуватися як в рухомих, так і в нерухомих системах відліку.

Рух твердого тіла відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення в цій системі в довільний момент часу.

Залежність параметрів, що характеризують положення твердого тіла відносно системи відліку, від часу визначається відповідними рівняннями, які називають *законами руху* тіла.

Оскільки рух геометричного образу тіла є відомим, коли відомий закон руху всіх його точок, то його рух слід розглядати після вивчення руху однієї його точки. Ця логіка є основою поділу «Кінематики» на такі розділи як «Кінематика точки» і «Кінематика твердого тіла» (залежно вид виду руху тіла) та кінематику сукупності твердого тіла і точки. Саме тому в підручнику спочатку розглянуто кінематику точки, а потім кінематику твердого тіла та синтез рухів.

У підручнику всі розділи кінематики надано в такій послідовності: спочатку викладено теоретичний матеріал, створений на базі підручника [1], потім представлено практичну частину, в якій розглянуто методику розв'язування задач з даного розділу, а також серія задач з демонстраційним розв'язуванням, що супроводжуються повним поясненням [2, 3]. Після цього запропоновано задачі для самостійного розв'язування [4]. Далі надано низку заходів для перевірки засвоєння знань: питання для самоконтролю, тестові запитання та тестові завдання. Зазначимо, що всі умови задач, які наведено в підручнику і розв'язано, взяті зі збірника задач [4]. Це пов'язано з тим, що він має широке застосування при вивченні практичної частини теоретичної механіки. Корисною буде також робота з літературними джерелами [5-10], де можна знайти додатковий матеріал як з практичної, так і з теоретичної частин.

Теоретична частина підручника не переобтяжена математичними доведеннями, які можна знайти в підручнику [1]. Тестові запитання та завдання створені для кожного розділу таким чином, щоб це було цікаво студентам.

Розділ 1
Кінематика точки

Основною задачею кінематики точки є встановлення закону руху точки. Знаючи закон руху точки, можна визначити її основні кінематичні характеристики (траєкторію, швидкість, прискорення). Задачі з визначення закону руху і всіх кінематичних характеристик потрібно розв'язувати в такій послідовності:

1. Вибрати систему координат або систему відліку з урахуванням умови задачі, щоб розв'язання було якомога простішим.

Якщо з умови задачі можна визначити координати точки, вибирають декартову систему координат. Якщо рух точки відбувається на площині, користуються також полярною системою координат. В такому випадку початок координат необхідно помістити в нерухомій точці.

Якщо відома траєкторія руху точки і закон руху по ній, користуються осями натурального тригранника. Тоді початок координат потрібно помістити в точці, рух якої розглядається. Дотичну вісь τ спрямовують по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки, головну нормаль n – по радіусу кривини траєкторії, а бінормаль b – нормально до стичної площини τn.

2. Виходячи з умови задачі та користуючись вибраною системою координат, скласти рівняння руху, тобто знайти залежність координат точки від часу.

3. Маючи рівняння руху точки, знайти її положення в довільний момент часу, підставляючи це значення часу в рівняння руху.

4. Визначити траєкторію руху точки, вилучаючи з рівнянь руху параметр часу t, і знайти закон руху цієї точки по траєкторії.

5. Визначити швидкість руху точки та її напрямок.

6. Визначити прискорення руху точки та його напрямок.

7. Визначити радіус кривини.

8. Побудувати графіки руху, швидкості, прискорення.

9. Побудувати годограф швидкості.

У кінематиці точки будемо розглядати прямі та обернені задачі.

У прямих задачах за заданими рівняннями руху визначають основні кінематичні величини: швидкість і прискорення точки. В обернених задачах необхідно визначити рівняння руху точки, якщо відомі її швидкість та прискорення, а також початкові умови.

Розв'язання прямих та обернених задач кінематики точки розглянемо на прикладах.

1.1. Прямі задачі кінематики точки

Якщо рух точки задано в координатній формі (рис. 1.1), тобто задано координати точки як неперервні функції часу:

$$x = x(t);$$
$$y = y(t);$$
$$z = z(t),$$

то модулі швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{W}$ точки визначають за їх проекціями на осі координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \qquad (1.1)$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

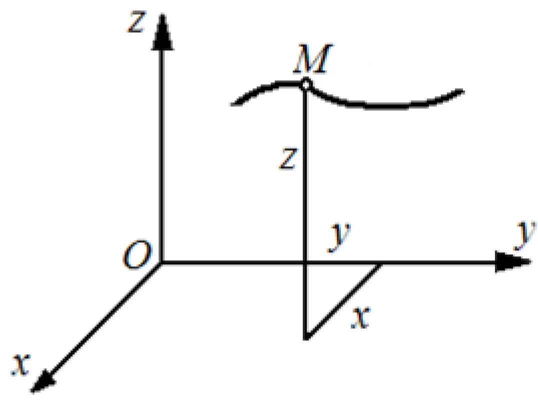


Рис. 1.1.

Тоді модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \qquad (1.2)$$

а напрям швидкості точки визначають за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{v},x}) = \frac{v_x}{v};$$
$$\cos(\widehat{\vec{v},y}) = \frac{v_y}{v}; \qquad (1.3)$$
$$\cos(\widehat{\vec{v},z}) = \frac{v_z}{v}.$$

У свою чергу, проекції прискорення точки мають вигляд:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};$$
$$W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \qquad (1.4)$$
$$W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

а модуль прискорення точки

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\,. \qquad (1.5)$$

Напрям прискорення точки визначають за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{W},x}) = \frac{W_x}{W};$$
$$\cos(\widehat{\vec{W},y}) = \frac{W_y}{W}; \qquad (1.6)$$
$$\cos(\widehat{\vec{W},z}) = \frac{W_z}{W}\,.$$

Якщо рівняння руху точки складено в полярних координатах:

$$r = r(t);$$
$$\varphi = \varphi(t),$$

то швидкість точки визначають також за проекціями швидкості на радіальну та трансверсальну осі, а саме за v_r і v_φ:

$$v_r = \dot{r};$$
$$v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Отже, модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Прискорення точки визначають за проекціями прискорення на радіальну (W_r) та трансверсальну (W_φ) осі:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$
$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi},$$

а його модуль

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}.$$

Якщо рівняння руху точки задано в натуральній формі, то проекцію швидкості точки на напрям дотичної $\vec{\tau}$ знаходять як першу похідну за часом від дугової координати

$$v_\tau = \frac{dS}{dt}\ ,\ v_\tau = \pm v. \qquad (1.7)$$

Зауважимо, що вектор швидкості точки завжди напрямлений по дотичній до її траєкторії в бік руху.

Модуль прискорення $\overrightarrow{W}$ точки визначають за його проекціями на дотичну (W_τ) та головну нормаль (W_n), а саме:

$$W_\tau = \frac{dv_\tau}{dt};$$
$$W_n = \frac{v_\tau^2}{\rho}, \qquad (1.8)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії.

Тоді модуль прискорення точки

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}. \qquad (1.9)$$

Напрям прискорення точки визначають за кутом α, який утворює вектор повного прискорення $\overrightarrow{W}$ з нормальним прискоренням $\overrightarrow{W_n}$ (рис. 1.2):

$$tg\alpha = \frac{W_\tau}{W_n}\,.$$

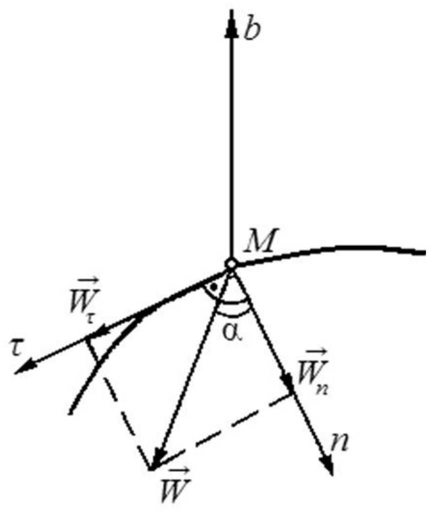


Рис. 1.2

Якщо дотичне прискорення постійне ($W_\tau = \text{const}$), то відбувається рівнозмінний рух точки (якщо $W_\tau > 0$, – рух рівноприскорений, якщо $W_\tau < 0$, то рух рівносповільнений). Як відомо з теорії, швидкість точки і закон зміни її переміщення визначають у цьому разі за формулами

$$v = v_0 \pm W_\tau t, \tag{1.10}$$

$$S = v_0 t \pm W_\tau t + S_0. \tag{1.11}$$

Розв’язання багатьох задач потребує уміння визначати рівняння годографа швидкості.

Якщо рух точки задано координатним способом, то в параметричній формі ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_x = F_1(t); \\ y_1 &= v_y = F_2(t); \\ z_1 &= v_z = F_3(t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Якщо необхідно визначити закон руху точки по траєкторії, то застосовують формулу

$$S = \int_{t_0}^{t} (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2})\, dt.$$

Якщо рух точки задається координатним способом, то радіус кривини визначають таким чином:

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - (\dot{v})^2}}. \tag{1.13}$$

Задача 1

Лінійка еліпсографа (рис. 1.3), довжина якої $AB = l$ см, приводиться в рух кривошипом $OC = 0{,}5\, l$, шарнірно закріпленим в її середині. Відстані $AM = \frac{1}{4} l$, $BM = \frac{3}{4} l$, кут $\varphi = \omega t$. Скласти рівняння руху точки M еліпсографа та рівняння її траєкторії. Визначити радіус кривини траєкторії точки M, її швидкість, дотичне, нормальне та повне прискорення за довільного положення механізму та в момент часу $t_1 = \frac{1}{2}$ с, якщо $\omega = \pi$ рад/с. Знайти також годограф швидкості.

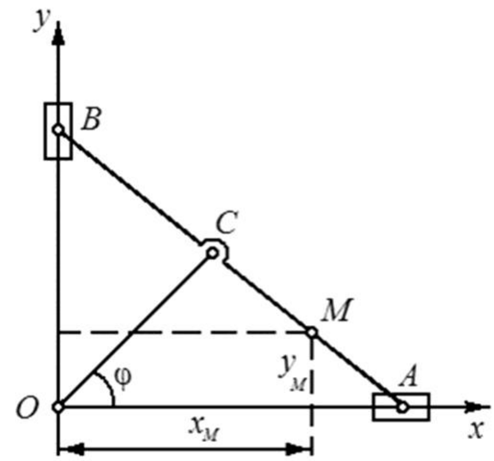


Рис. 1.3

Розв’язання

Як видно з умови задачі, положення точки M легко визначити координатним способом. Виберемо осі координат, як показано на рис. 1.3.

Початок системи координат помістимо в нерухомій точці O. Визначимо координати точки M (у сантиметрах) й отримаємо рівняння її руху:

$$x = BM\cos\varphi = \frac{3}{4}l\cos\omega t;$$

$$y = AM\sin\varphi = \frac{1}{4}l\sin\omega t.$$

Щоб визначити траєкторію руху точки в явній формі, вилучимо з отриманих рівнянь параметр t:

$$\frac{x}{\frac{3}{4}l} = \cos\omega t;\quad \frac{y}{\frac{1}{4}l} = \sin\omega t.$$

Отже,

$$\frac{x^2}{(\frac{3}{4}l)^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{4}l)^2} = 1.$$

Таким чином, траєкторія точки M є еліпсом з півосями $\frac{3}{4}l$ і $\frac{1}{4}l$.

Для визначення швидкості руху точки M обчислимо проекції швидкості на осі координат за виразами (1.1):

$$v_x = \dot{x} = -\frac{3}{4}l\omega\sin\omega t;$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{1}{4}l\omega\cos\omega t.$$

Тоді модуль швидкості точки з формули (1.2)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{l\omega}{4}\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \frac{l\omega}{4}\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}.$$

Напрям вектора швидкості визначаємо за напрямними косинусами (1.3):

$$\cos(\widehat{\vec{v}, x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-\frac{3}{4}l\omega\sin\omega t}{\frac{l\omega}{4}\sqrt{8\sin^2\omega t+1}} = -\frac{3\sin\omega t}{\sqrt{8\sin^2\omega t+1}},$$

$$\cos(\widehat{\vec{v}, y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{1}{4}l\omega\cos\omega t}{\frac{l\omega}{4}\sqrt{8\sin^2\omega t+1}} = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{8\sin^2\omega t+1}}.$$

Для визначення прискорення точки M знаходимо його проекції на осі координат за формулами (1.4):

$$W_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -\frac{3}{4}l\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x;$$

$$W_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{1}{4}l\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Тоді модуль прискорення з виразу (1.5) становитиме (см/с^2):

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{l\omega^2}{4}\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = \frac{l\omega^2}{4}\sqrt{8\cos^2\omega t + 1}.$$

Напрям прискорення визначаємо за напрямними косинусами (1.6):

$$\cos(\widehat{\vec{W},x}) = \frac{W_x}{W} = -\frac{3\cos\omega t}{\sqrt{8\cos^2\omega t+1}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{W},y}) = \frac{W_y}{W} = -\frac{\sin\omega t}{\sqrt{8\cos^2\omega t+1}}.$$

Радіус кривини траєкторії ρ дістаємо за формулою (1.13), ураховуючи, що з виразу (1.8)

$$W_\tau = \dot{v}_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{l\omega^2\sin 2\omega t}{8\sqrt{8\sin^2\omega t+1}}.$$

Отже, $\rho = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-\dot{v}_\tau^2}} = \frac{\frac{l^2\omega^2}{16}\left(8\sin^2\omega t+1\right)}{\sqrt{\frac{l^2\omega^4}{16}\left(8\cos^2\omega t+1\right)-\left(\frac{l\omega^2\sin 2\omega t}{8\sqrt{8\sin^2\omega t+1}}\right)^2}} =$

$$= \frac{l\left(8\sin^2\omega t+1\right)^{3/2}}{2\sqrt{4\left(8\cos^2\omega t+1\right)^2-\sin^2 2\omega t}}.$$

Нормальне прискорення точки (см/с^2)

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{\frac{l^2\omega^2}{16}(8\cos^2\omega t+1) - \frac{l^2\omega^4\sin^2 2\omega t}{64(8\sin^2\omega t+1)}} =$$

$$= \frac{l\omega^2}{8}\sqrt{4(8\cos^2\omega t+1) - \frac{\sin^2 2\omega t}{8\sin^2\omega t+1}}.$$

У параметричній формі рівняння годографа швидкості за формулами (1.12) мають вигляд:

$$x_1 = \dot{x} = -\frac{3}{4}l\omega\sin\omega t;$$

$$y_1 = \dot{y} = \frac{1}{4}l\omega\cos\omega t.$$

Вилучаючи з останніх рівнянь параметр t, маємо

$$\frac{x_1^2}{(\frac{3}{4}l)^2\omega^2} + \frac{y_1^2}{(\frac{1}{4}l)^2\omega^2} = 1.$$

Отже, годограф швидкості – еліпс з півосями $\frac{3}{4}\,l\omega$ і $\frac{1}{4}\,l\omega$. Якщо $t = \frac{1}{2}$ с і $\omega = \pi$ рад/с, отримуємо значення v, W, W_τ, W_n і ρ:

$$v = \frac{l}{4}\pi\sqrt{8\sin^2\frac{\pi}{2}+1} = \frac{3}{4}\pi l;$$

$$W = \frac{l\pi^2}{4}\sqrt{8\cos^2\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{l}{4}\pi^2;$$

$$W_\tau = \frac{l\pi^2 \sin\pi}{8\sqrt{8\sin^2\frac{\pi}{2}+1}} = 0;$$

$$W_n = \frac{l\pi^2}{8}\sqrt{4\left(8\cos^2\frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{\sin^2\pi}{8\sin^2\frac{\pi}{2}+1}} = \frac{2l\pi^2}{8} = \frac{l}{4}\pi^2;$$

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\pi l\right)^2}{\frac{l}{4}\pi^2} = \frac{9}{4}l.$$

Задача 2

Пряма OA обертається навколо точки O та перетинає пряму M_0B у точці M (рис. 1.4). Визначити швидкість руху точки M уздовж прямої M_0B, її прискорення як функцію відстані S та радіус кривини траєкторії, якщо кут $\varphi = \omega t$, де $\omega = \text{const}$, $OM_0 = a$.

Розв'язання

Оскільки відома траєкторія руху точки M (пряма лінія), то єдину вісь τ напрямимо вздовж траєкторії M_0M (рис. 1.4). У довільний момент часу положення точки M визначаємо дуговою координатою:

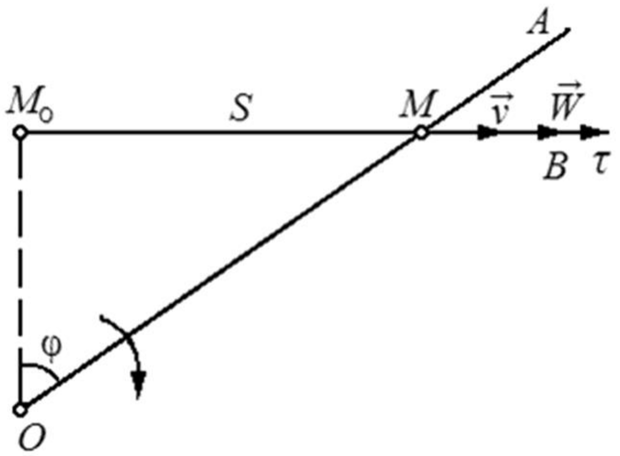


Рис. 1.4

$$S = M_0M = a\,\text{tg}\varphi = a\,\text{tg}(\omega t).$$

Це рівняння визначає також закон руху точки M по її траєкторії. Оскільки точка M рухається в одному напрямі, то S визначає і шлях, пройдений точкою M.

Швидкість руху точки знаходимо за формулою (1.7):

$$v_\tau = \frac{dS}{dt} = \frac{a\omega}{\cos^2\omega t}.$$

Оскільки траєкторія точки – пряма, то нормальне прискорення $W_n = 0$, а повне прискорення з виразів (1.8) і (1.9)

$$W = W_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 2a\omega^2\frac{\text{tg}\omega t}{\cos^2\omega t} = 2a\omega^2\text{tg}\omega t(1 + \text{tg}^2\omega t) = 2S\omega^2\left(1 + \frac{S^2}{a^2}\right).$$

Радіус кривини траєкторії точки

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \infty.$$

Вектори швидкості та прискорення точки напрямлені вздовж її траєкторії.

Задача 3

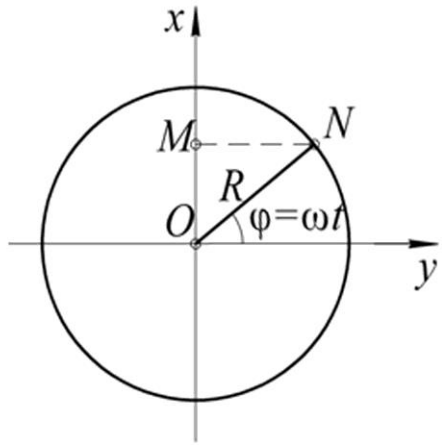


Рис. 1.5

Точка N рухається рівномірно по колу радіусом R (рис. 1.5). Скласти рівняння руху її проекції M на вертикальний діаметр, визначити швидкість її руху та прискорення, побудувати графіки руху і швидкості, а також скласти рівняння годографа швидкості, якщо в початковий момент часу точка була на горизонтальному діаметрі, а кут φ = ωt, де ω = const.

Розв'язання

Оскільки з умови задачі необхідно скласти рівняння руху проекції точки N на вертикальний діаметр, тобто рівняння руху точки M, то виберемо координатний спосіб і єдину вісь Ox напрямимо, як показано на рис. 1.5.

Визначимо координату x точки N:

$$x = ON \sin \varphi = R \sin \omega t.$$

Отримане рівняння і буде рівнянням руху точки M.

Швидкість руху точки M

$$v = \dot{x} = R\omega \cos \omega t.$$

Прискорення точки M

$$W = W_\tau = \dot{v} = \ddot{x} = -R\omega^2 \sin \omega t.$$

Графіком руху точки є синусоїда (рис. 1.6), а швидкості – косинусоїда (рис. 1.7).

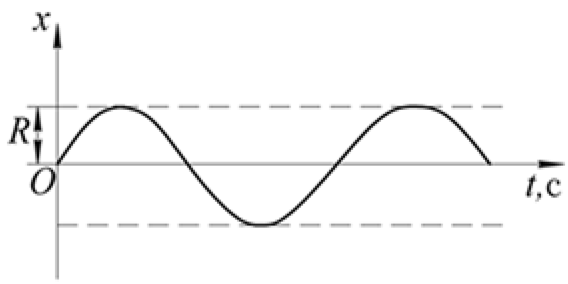


Рис. 1.6

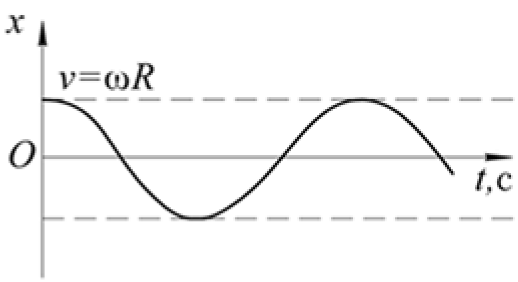


Рис. 1.7

Рівняння годографа швидкості точки:

$$x_1 = \dot{x} = R\omega \cos \omega t.$$

Задача 4

Точка M починає рухатись з положення M_0 уздовж прямої OA зі швидкістю v, пропорційною відстані $OM = r$ (рис. 1.8). Таким чином, $v = kr$ та $r = r_0$, якщо $t_0 = 0$. Сама пряма обертається навколо центра O в площині рисунка.

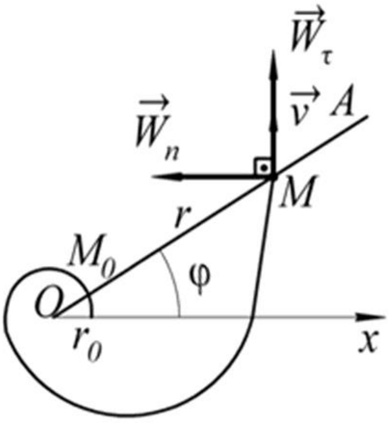


Рис. 1.8

Визначити траєкторію, швидкість та прискорення точки M, якщо пряма утворює з віссю x кут $\varphi = \omega t$, де $\omega = \text{const}$, а також радіус кривини траєкторії.

Розв'язання

Оскільки рух точки відбувається на площині, визначимо закон руху, користуючись полярними координатами r і φ. За умовою задачі радіальна проекція швидкості

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v = kr,$$

звідки
$$\frac{dr}{r} = kdt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = \int_0^t kdt.$$

Маємо: $ln\frac{r}{r_0} = kt$ або $r = r_0 e^{kt}$.

Рівняння руху точки M у полярних координатах

$$r = r_0 e^{kt};$$
$$\varphi = \omega t.$$

Вилучивши з цих рівнянь t, отримуємо рівняння траєкторії

$$r = r_0 e^{\frac{k}{\omega}\varphi}.$$

Отже, точка M описує логарифмічну спіраль.

Швидкість та прискорення точки визначимо за їх радіальними та трансверсальними проекціями:

$$v_r = \dot{r} = r_0 k e^{kt} = kr;$$
$$v_\varphi = r\dot{\varphi};$$
$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = (k^2 - \omega^2)r;$$
$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2k\omega r,$$

де $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$ (згідно з умовою задачі);

$$\ddot{\varphi} = 0.$$

Тоді швидкість точки

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = r\sqrt{k^2 + \omega^2},$$

а величина її прискорення

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\varphi^2} = r\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} = (k^2 + \omega^2)r.$$

Таким чином, модулі швидкості та прискорення точки збільшуються пропорційно її відстані r від центра O.

Для визначення радіуса кривини траєкторії точки необхідно знайти W_τ і W_n.

Дотичне і нормальне прискорення точки з виразів (1.8):

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \sqrt{k^2 + \omega^2}\dot{r} = kr\sqrt{k^2 + \omega^2};$$

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{(k^2 + \omega^2)^2 r^2 - k^2 r^2 (k^2 + \omega^2)} = r\omega\sqrt{k^2 + \omega^2}.$$

Отже, радіус кривини траєкторії

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{\left(r\sqrt{k^2+\omega^2}\right)^2}{r\omega\sqrt{k^2+\omega^2}} = \frac{r\sqrt{k^2+\omega^2}}{\omega}.$$

Отримуємо, що радіус кривини збільшується пропорційно r.

Задача 5

Точка рухається по півколу радіусом r (рис. 1.9). Проекція руху точки на діаметр являє собою рівномірний рух зі швидкістю u. Знайти швидкість v і прискорення W точки M як функції центрального кута φ.

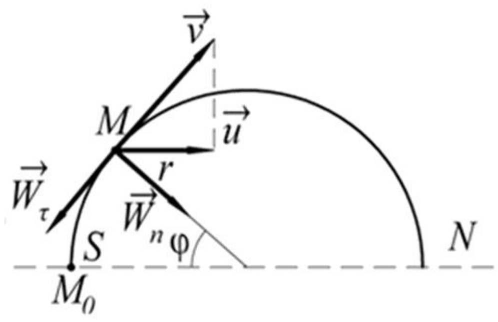


Рис. 1.9

Розв’язання

Оскільки за умовою задачі відома траєкторія точки і можна визначити закон руху точки по траєкторії з елементарних міркувань геометрії ($S = r\varphi$), то рух точки задано натуральним способом. Задана швидкість u є проекцією швидкості $\vec{v}$ точки M на діаметр M_0N. Тому $u = v\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = v\sin\varphi$.

Отже, $v = \frac{u}{\sin\varphi}$.

Дотичне прискорення точки (оскільки $v = v(\varphi(t))$)

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{u\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi}.$$

Нормальне прискорення точки

$$W_n = \frac{v^2}{r} = \frac{u^2}{r\sin^2 \varphi}.$$

Повне прискорення точки

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \frac{u}{\sin^2 \varphi} \sqrt{\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{u^2}{r^2}}.$$

Задача 6

Точка рухається за рівняннями: $x = 3\cos^2 t$; $y = 3\sin^2 t$ (x, y – у метрах, t – у секундах).

Визначити дотичне, нормальне, повне прискорення точки в момент $t = \frac{\pi}{4}$ (у секундах) і радіус кривини траєкторії.

Розв'язання

Рух точки задано координатним способом. Отже, для знаходження прискорення визначаємо проекції швидкості та прискорення точки на осі координат Ox, Oy. Маємо:

$$v_x = \dot{x} = -6\cos t \sin t = -3\sin 2t;$$
$$v_y = \dot{y} = 6\sin t \cos t = 3\sin 2t.$$

Якщо $t = \frac{\pi}{4}$, то $v_x = -3$ м/с, $v_y = 3$ м/с.

$$W_x = \ddot{x} = -6\cos 2t;$$
$$W_y = \ddot{y} = 6\cos 2t.$$

Якщо $t = \frac{\pi}{4}$, то $W_x = 0$. $W_y = 0$.

Тоді швидкість точки (м/с)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3\sqrt{2}\sin 2t,$$

а прискорення точки (м/с^2)

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 6\sqrt{2}\cos 2t.$$

Якщо $t = \frac{\pi}{4}$, маємо:

$$v_1 = 3\sqrt{2};$$
$$W_1 = 0.$$

Для визначення радіуса кривини траєкторії точки необхідно знайти W_τ і W_n.

Дотичне прискорення точки (м/с^2)

$$W_\tau = \dot{v} = 6\sqrt{2}\cos 2t.$$

Якщо $t = \frac{\pi}{4}$, то $W_\tau = 0$.

Нормальне прискорення точки

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{72\cos^2 2t - 72\cos^2 2t} = 0.$$

$W_n = 0$, оскільки траєкторією точки є пряма. Дійсно, вилучаючи з рівнянь руху параметр t, маємо

$$x + y = 3.$$

Отже, радіус кривини траєкторії точки (для $t = \frac{\pi}{4}$) $\rho = \infty$, оскільки

$$\rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{v^2}{0} = \infty.$$

Задача 7

Вантаж, підвішений до пружини, здійснює прямолінійні гармонічні коливання. Скласти рівняння руху вантажу, (см/с)

1) якщо $t = 0$: $x_0 = 0$; $v_0 = 20\pi$;

2) якщо кількість коливань за хвилину становить 120. Побудувати діаграму відстаней та швидкостей вантажу.

Розв'язання

Оскільки рухома точка M здійснює вертикальні прямолінійні гармонічні коливання вздовж осі Ox (рис. 1.10), то закон її руху можна виразити через гармонічні функції:

$$x = A\sin kt + B\cos kt.$$

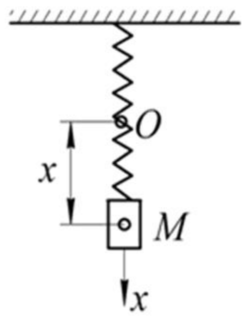


Рис. 1.10

Швидкість точки M

$$v = \dot{x} = Ak\cos kt - Bk\sin kt.$$

Коефіцієнти A і B визначимо з початкових умов: якщо $t_0 = 0$, то $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 = 20\pi$. Підставляючи ці значення в рівняння руху і рівняння швидкості, знаходимо:

$$A = \frac{20\pi}{k}; B = 0.$$

Тоді рівняння руху набуде вигляду

$$x = A\sin kt = \frac{20\pi}{k}\sin kt.$$

Величину A називають амплітудою коливань, а k – частотою коливань.

Дійсно, оскільки $-1 \le \sin kt \le 1$, то координата x буде змінюватись від $-A$ до $+A$ і точка буде описувати прямолінійний відрізок довжиною $2A$.

Припустімо, що в початковий момент часу точка M перебувала в середині відрізка $2A$ (точка 0). Тоді A і є амплітудою коливань, або найбільшим відхиленням точки M від середнього положення.

Покажемо, що гармонічні коливання є періодичними з періодом

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Нехай T означає постійний проміжок часу, протягом якого точка здійснює одне повне коливання.

Розглянемо момент часу t, якому відповідає координата $x = A\sin kt$ і момент часу $t + T$, якому відповідає координата точки

$$A\sin[k(t+T)] = A\sin(kt + kT).$$

Виходячи з періодичності функції sin, маємо

$$A\sin(kt + kT) = A\sin(kt + 2\pi),$$

звідки $kT = 2\pi$. Отже, $T = \frac{2\pi}{k}$.

Період коливань T знайдемо, виходячи з умови задачі, оскільки відомо, що за одну хвилину точка здійснює 120 коливань.

Тому період коливань (с)

$$T = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Тоді частота коливань (1/с)

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Амплітуда коливань (см)

$$A = \frac{20\pi}{k} = \frac{20\pi}{4\pi} = 5.$$

Отже, закон руху точки подамо у вигляді

$$x = 5\sin 4\pi t.$$

Швидкість руху точки

$$v = \dot{x} = 20\pi\cos 4\pi t.$$

Побудуємо діаграми відстаней і швидкостей. Діаграма відстаней є синусоїдою (рис. 1.11), а швидкостей – косинусоїдою (рис. 1.12).

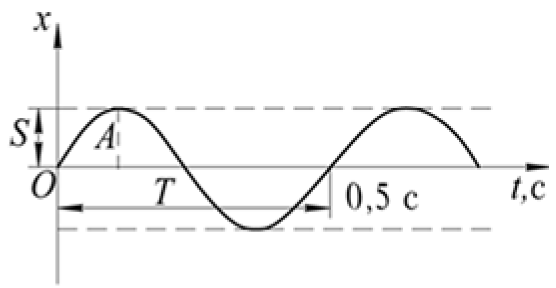


Рис. 1.11

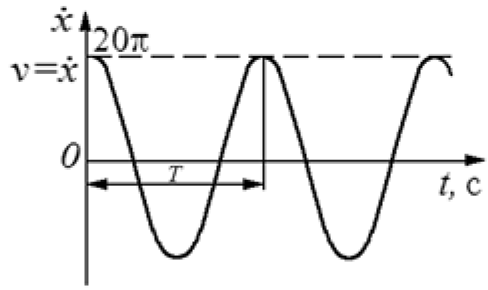


Рис. 1.12

Задача 8

Рух пальця A кривошипа OA (рис. 1.13, *а*) задано рівняннями:

$$x = 15\sin\frac{\pi}{4}t\ ; \quad y = 15\cos\frac{\pi}{4}t,$$

де x, y – у сантиметрах, t – у секундах. Визначити траєкторію руху пальця кривошипа і проекції швидкості, коли він перебуває на осях координат. Знайти рівняння годографа швидкості точки A.

Розв’язання

Рух точки A задано координатним способом.

Вилучаючи з рівнянь руху параметр t, отримуємо рівняння траєкторії точки:

$$x^2 + y^2 = 15^2.$$

Отже, траєкторією руху точки A є коло (рис. 1.13, *а*) радіусом R = 15 см.

Користуючись формулами (1.1), дістанемо:

$$v_x = \dot{x} = \frac{15}{4}\pi\cos\frac{\pi}{4}t;$$

$$v_y = \dot{y} = -\frac{15}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t\,.$$

Модуль швидкості точки A

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{15}{4}\pi.$$

Визначимо проекції швидкості пальця кривошипа, коли він перебуває на осях координат.

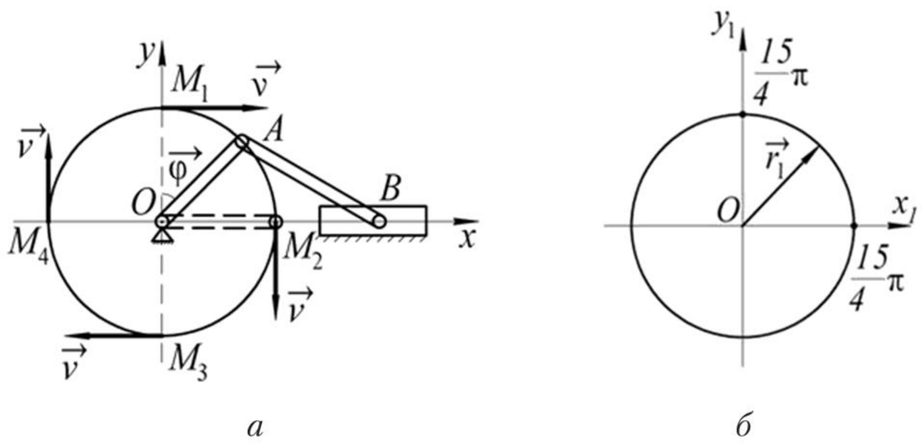


Рис. 1.13

Коли палець міститься на осі Oy (точка M_1, рис. 1.13, *а*), швидкість його буде напрямлена по дотичній до траєкторії, тобто вектор швидкості $\vec{v}$ буде паралельним осі Ox. Тому, якщо x = 0 і y = 15 см, проекції швидкості точки становитимуть:

$$v_x = \frac{15}{4}\pi,\ \ v_y = 0.$$

Аналогічно знаходимо проекції швидкості пальця, коли він буде на осі Ox – точка M_2, тобто якщо x = 15 см і y = 0, то

$$v_x = 0;\ v_y = -\frac{15}{4}\pi \text{ (рис. 13, } a\text{)}.$$

Рівняння годографа швидкості в параметричній формі:

$$x_1 = \dot{x} = \frac{15}{4}\pi\cos\frac{\pi}{4}t;$$

$$y_1 = \dot{y} = -\frac{15}{4}\pi \sin\frac{\pi}{4}t.$$

Вилучаючи з цих рівнянь параметр t, отримаємо:

$$x_1^2 + y_1^2 = (\frac{15}{4}\pi)^2.$$

Отже, годограф швидкості є коло радіуса $\frac{15}{4}\pi$ (см) (рис. 1.13, *б*).

Задача 9

Скинута бомба з літака рухається згідно з рівняннями:

$$x = v_0 t\,;\; y = h - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Вісь Ox напрямлена горизонтально, вісь Oy – вертикально вгору.

Визначити: 1) рівняння траєкторії; 2) швидкість бомби (значення і напрямок) у момент часу, коли вона перетинає вісь Ox; 3) дальність польоту; 4) рівняння годографа швидкості бомби і швидкість v_1 точки, яка викреслює цей годограф.

Розв’язання

Рух точки задано координатним способом.

Вилучаючи з рівнянь руху параметр t, отримаємо рівняння траєкторії бомби:

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}\,.$$

Отже, траєкторією бомби є парабола.

Проекції швидкості точки (бомби):

$$v_x = \dot{x} = v_0;$$
$$v_y = \dot{y} = -gt.$$

Модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Визначимо проміжок часу, коли бомба перетинає вісь Ox, при цьому координата y дорівнює нулю ($y = 0$), тобто

$$h - \frac{gt^2}{2} = 0, \text{ звідки } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Швидкість бомби в момент часу, коли вона перетинає вісь Ox:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2\frac{2h}{g}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Напрям вектора швидкості визначаємо за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{v},x}) = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{v_0}{v};$$

$$\cos(\widehat{\vec{v},y}) = \frac{\dot{y}}{v} = -\frac{gt}{v} = -\frac{g\sqrt{\frac{2h}{g}}}{v} = -\frac{\sqrt{2gh}}{v}.$$

Дальність польоту бомби

$$x = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}}.$$

Рівняння годографа швидкості точки:

$$x_1 = \dot{x} = v_0;$$
$$y_1 = \dot{y} = -\mathrm{g}t.$$

Отже, годографом швидкості є вертикальна пряма, яка віддалена від початку координат на відстань v_0.

Проекції швидкості точки, яка викреслює годограф швидкості:

$$v_{1x} = \dot{x}_1 = 0;$$

$$v_{1y} = \dot{y}_1 = -\mathrm{g}.$$

Отже, її швидкість

$$v = v_{1y} = -\mathrm{g}.$$

Задача 10

Трамвай, починаючи рухатись по прямолінійній траєкторії, збільшує свій шлях пропорційно кубу часу ($s = kt^3$, де s – шлях, м; t – час, с). Протягом першої хвилини він пройшов шлях s = 90 м. Визначити його швидкість і прискорення в моменти часу $t_1 = 0$ і $t_2 = 5$ с. Побудувати криві відстаней, швидкостей і прискорень.

Розв'язання

За умовою задачі рух трамвая можна розглянути як рух матеріальної точки, заданий натуральним способом.

Закон його руху $s = kt^3$.

Визначимо коефіцієнт k. Для цього скористаємось тим, що протягом першої хвилини точка подолала шлях s = 90 м. Таким чином, якщо t = 60 с, то s = 90 м. Із закону руху трамвая отримуємо:

$$90 = k60^3,$$

звідки

$$k = \frac{90}{60^3} = \frac{1}{2400}\ \text{м/с}^3\ .$$

Отже,

$$s = \frac{1}{2400}t^3.$$

Швидкість руху точки (м/с) визначаємо за формулою (1.7):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2400}t^2 = \frac{1}{800}t^2.$$

У момент часу $t = 0$ швидкість точки з останнього виразу $v = 0$, а в момент часу $t = 5$ с

$$v = \frac{5^2}{800} = \frac{1}{32} \text{ м/с}.$$

Оскільки за умовою задачі трамвай рухається по прямій, то

$$W_n = 0;\ W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{400}t.$$

Якщо $t = 0$, то $W = W_\tau = 0$, якщо $t = 5$ с, то $W = W_\tau = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$ м/с^2.

Щоб побудувати криві відстаней, швидкостей і прискорень, складемо таблицю (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

t, с	s, м	v, м/с	W, м/с^2
0	0	0	0
5	$\frac{5}{96}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{80}$
10	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$
20	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$
30	$\frac{135}{12}$	$\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$	$\frac{3}{40}$
60	90	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{20}$

Криві відстаней, швидкостей і прискорень зображено відповідно на рис. 1.14, рис. 1.15 і рис. 1.16.

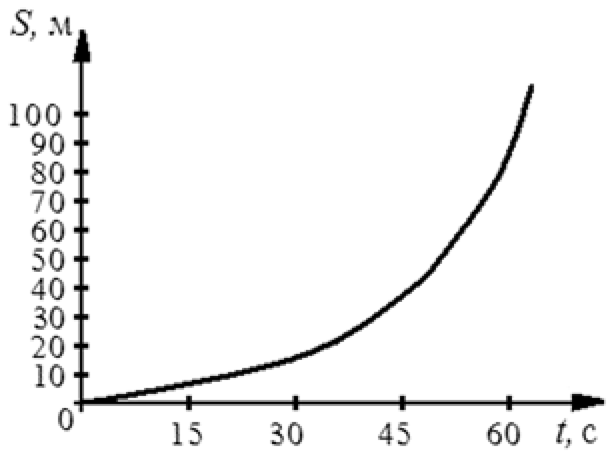


Рис. 1.14

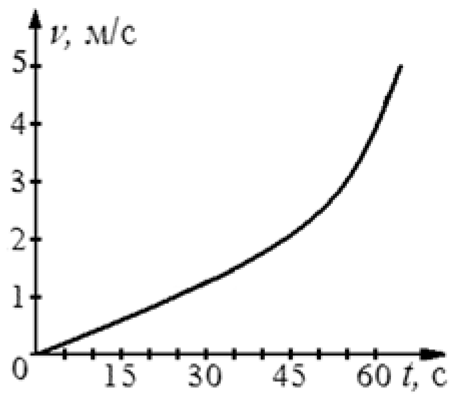


Рис. 1.15

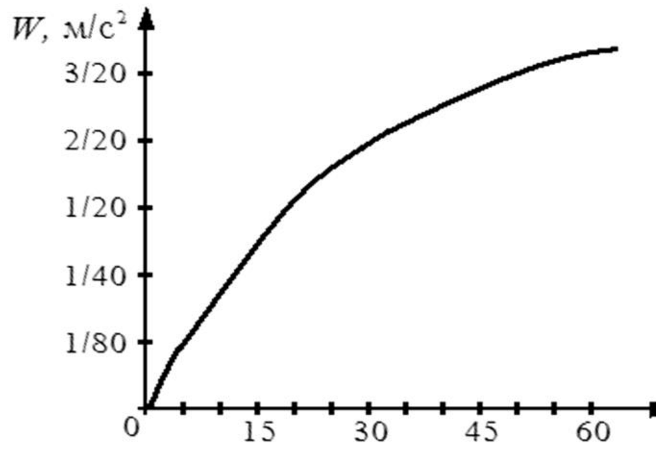


Рис. 1.16

Рекомендуємо самостійно розв'язати задачі: 10.12; 11.2; 12.7; 12.9; 12.10; 12.11; 12.26; 12.27 [4].

1.2. Обернені задачі кінематики точки

Під час розв'язання обернених задач кінематики точки можливі такі випадки:

1. За відомим дотичним прискоренням точки W_τ необхідно визначити проекцію швидкості точки на напрямок дотичної і закон руху точки по траєкторії, якщо відомі початкові умови, тобто якщо $t = t_0$, то швидкість $v(0) = v_0$ і початкова дугова координата $s(0) = s_0$.

Маємо

$$\frac{dv_\tau}{dt} = W_\tau; \;\; dv_\tau = W_\tau dt;$$

$$v_\tau = \int_{t_0}^{t} W_\tau dt + v_0.$$

Оскільки $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, отримаємо:

$$ds = \left(\int_{t_0}^{t} W_\tau dt + v_0\right) dt;$$

$$s = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} W_\tau dt + v_0\right) dt + s_0. \qquad (1.14)$$

2. За відомою проекцією прискорення на одну з координатних осей, наприклад, на вісь Ox (W_x), необхідно визначити відповідну проекцію швидкості і відповідну координату точки, якщо відомі початкові умови (початкова швидкість v_{0x} і початкова координата x_0).

3. За відомою швидкістю потрібно визначити закон руху точки $s = s(t)$ по траєкторії, якщо відоме початкове значення s_0 в момент часу $t = t_0$.

4. За відомими проекціями швидкості (v_x, v_y, v_z) необхідно визначити закон руху точки в просторі або на площині та координати точки $x = x(t)$,

$y = y(t)$, $z = z(t)$ за умови, що відомі початкові значення координат, тобто якщо $t = t_0$, відомі x_0, y_0 і z_0.

Задача 11

Визначити рівняння руху точки по траєкторії $s = s(t)$, а також значення дугової координати s і пройдений шлях σ за проміжок часу $t = 5$ с, якщо її швидкість (м/с) задана рівнянням $v = (3 - t)$. У початковий момент часу $s_0 = 0$.

Розв'язання

Ця задача є прикладом оберненої задачі кінематики. За формулою (1.7)

$$v = \frac{dS}{dt}, \text{ тобто } \frac{dS}{dt} = (3 - t),$$

звідки $ds = (3 - t)dt$; $s = \int_{t_0}^{t} (3 - t)dt + C_1$.

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$s = 3t - \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Сталу інтегрування C_1 визначимо з початкових умов. Якщо $t = 0$, то $s_0 = 0$.

Отже, $C_1 = 0$, тому отримуємо:

$$s = 3t - \frac{t^2}{2}.$$

Це рівняння визначає закон руху точки по траєкторії.

Визначимо шлях, що його проходить точка за час $t = 5$ с:

$$\sigma = |s| = 15 - \frac{25}{2} = 2{,}5 \text{ м}.$$

Задача 12

Рух засувки гальмується за допомогою передавальної шестірні так, що від'ємне прискорення дорівнює 120 м/с^2. Через який проміжок часу t ця засувка зупиниться, якщо початкова швидкість її $v_0 = 2{,}88$ м/с, і який шлях s вона пройде?

Розв'язання

Оскільки прискорення в умові задачі постійне і від'ємне, то відбувається сповільнений рівнозмінний рух. Тому за формулами (1.10) і (1.11) маємо:

$$v = v_0 - Wt;$$

$$s = v_0 t - \frac{Wt^2}{2}.$$

Якщо $v = 0$, то $v_0 = Wt$, або 2,88 = 120 t, звідки $t = \frac{2{,}88}{120} = 0{,}024$ с.

Отже, пройдений засувкою шлях

$$\sigma = |s| = \left|2{,}88 \cdot \frac{2{,}88}{120} - \frac{120}{2}\left(\frac{2{,}88}{120}\right)^2\right| = 0{,}0346 \text{ м}.$$

Задача 13

Потяг рухається зі швидкістю 72 км/год; під час гальмування він має уповільнення 0,4 м/с^2. Визначити, за який час до прибуття потяга на станцію і на якій відстані від неї необхідно почати гальмування.

Розв'язання

За умовою задачі тут розглядаємо обернену задачу кінематики точки. Тому на основі формул (1.10) і (1.11) для сповільненого рівнозмінного руху

$$v = v_0 - Wt;$$

$$s = v_0 t - \frac{Wt^2}{2}.$$

Підставляючи значення $v_0 = \frac{7200}{3600} = 20$ м/с і $v = 0$ (кінцева швидкість) у рівняння швидкості, знайдемо проміжок часу від початку гальмування до прибуття потяга на станцію, а саме:

$$0 = 20 - 0{,}4t;$$

звідки

$$t = \frac{20}{0{,}4} = 50\text{ с}.$$

Відстань від станції, на якій потрібно почати гальмування потяга,

$$s = 20 \cdot 50 - \frac{0{,}4 \cdot 50^2}{2} = 1000 - 500 = 500\text{ м}.$$

Задача 14

Повзун рухається по прямолінійній напрямній з прискоренням м/с^2: $W_x = -\pi^2 \cos\frac{\pi}{2}t$. Визначити рівняння руху повзуна, якщо його початкова швидкість $v_{0x} = 4\pi$ м/с, а початкове положення збігається із середнім положенням, взятим за початок координат.

Розв'язання

Сформульована задача є оберненою. Визначимо проекцію швидкості руху точки на вісь Ox, використовуючи формулу (1.4):

$$v_x = \int_{t_0}^{t} W_x dt + C_1 = \int_{t_0}^{t} -\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} t dt + C_1 = -2\pi \sin\frac{\pi}{2} t + C_1.$$

Координата точки за формулою (1.1)

$$x = \int_{t_0}^{t} v_x dt + C_2 = \int_{t_0}^{t} (-2\pi \sin\frac{\pi}{2} t + C_1) dt + C_2 = 4\cos\frac{\pi}{2} t + C_1 t + C_2.$$

Визначимо сталі інтегрування з початкових умов.

Відомо, що якщо $t = 0$, то $v_{0x} = 4\pi$ м/с; $x_0 = 0$.

Маємо: $C_1 = 4\pi$ м/с; $C_2 = -4$ м.

Отже, рівняння руху точки (м)

$$x = 4\cos\frac{\pi}{2} t + 4\pi t - 4.$$

Задача 15

Водяні краплі витікають з отвору вертикальної трубочки через 0,1 с одна за одною і падають з прискоренням 981 см/с^2. Визначити відстань між першою і другою краплями через 1 с після моменту витікання першої краплі.

Розв'язання

Оскільки краплі падають з отвору трубочки без початкової швидкості ($v_0 = 0$) і початкова координата $s_0 = 0$, то на підставі виразу (1.14) рівняння руху запишемо як

$$s = \frac{Wt^2}{2}.$$

Перша крапля за 1 с пройде відстань

$$s_1 = \frac{Wt_1^2}{2}.$$

Друга крапля, яка починає свій рух через 0,1 с після першої, за проміжок часу $t_2 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ с пройде відстань

$$s_2 = \frac{Wt_2^2}{2}.$$

Відстань між краплями через 1 с після моменту часу витікання першої краплі

$$\sigma = s_1 - s_2 = \frac{Wt_1^2}{2} - \frac{Wt_2^2}{2} = \frac{W}{2}(t_1^2 - t_2^2) = \frac{W}{2}(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) =$$
$$= \frac{981}{2}(1 - 0{,}9)(1 + 0{,}9) = \frac{981 \cdot 0{,}19}{2} = 93{,}2 \text{ см}.$$

Задача 16

Визначити рух снаряда (рівняння руху, траєкторію, висоту і дальність обстрілу), якщо відомо, що прискорення руху $W = \mathrm{g} = 9{,}81$ м/с^2 завжди напрямлене вертикально вниз, початкова швидкість $v_0 = 1000$ м/с і нахилена під кутом α = 60° до горизонту.

Розв'язання

Тут розглядаємо обернену задачу. Використовуючи формули (1.4) і (1.1), маємо:

$$v_x = \int_{t_0}^{t} W_x dt + C_1;$$
$$v_y = \int_{t_0}^{t} W_y dt + C_2;$$
$$x = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} W_x dt + C_1\right) dt + C_3;$$
$$y = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} W_y dt + C_2\right) dt + C_4.$$

Згідно з умовою задачі

$$W_x = 0\,;\; W_y = -g.$$

Тому $v_x = C_1$; $v_y = \int_{t_0}^{t} -g dt + C_2 = -gt + C_2$.

Сталі інтегрування знайдемо, виходячи з початкових умов, тобто якщо $t = 0$, то $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos 60° = 1000\,\frac{1}{2} = 500$ м/с;

$v_{0y} = v_0 \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}1000 = 866$ м/с.

Отже, $C_1 = 500$ м/с; $C_2 = 866$ м/с.

Тому $v_x = 500$ м/с; $v_y = 866 - 9{,}81t$ м/с.

Рівняння руху снаряда

$$x = v_x t = 500t;$$

$$y = \int_0^t v_y dt + C_3 = \int_0^t (866 - 9{,}81t)dt + C_3 = 866t - 4{,}905t^2,$$

де $C_3 = 0$ (виходячи з початкових умов).

Для визначення траєкторії руху снаряда вилучимо з рівнянь руху параметр t.Тоді

$$t = \frac{x}{500};$$

$$y = 866\,\frac{x}{500} - 4{,}905\,\frac{x^2}{500^2}$$

або $y = 1{,}732x - 10^{-8} \cdot 1962x^2$.

Щоб визначити висоту польоту, обчислимо x, яке відповідає $y_{\max}$.

Для цього візьмемо першу похідну за x і дорівняємо її до нуля:

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}732 - 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1962x = 0,$$

звідки

$$x = \frac{1{,}732 \cdot 10^8}{2 \cdot 1962}.$$

Підставимо це значення x у вираз для y і отримаємо

$$h = y_{\max} = \frac{1{,}732 \cdot 1{,}732 \cdot 10^8}{2 \cdot 1962} - 10^{-8} \cdot 1962\left(\frac{1{,}732 \cdot 10^8}{2 \cdot 1962}\right)^2 = 38240 \text{ м}.$$

Значення координати x буде максимальним, якщо $y = 0$.

Для цього знайдемо t з рівняння для y:

$$0 = 866t - 4{,}905t^2,$$

звідки

$$t = \frac{866}{4{,}905} \text{ с}.$$

Тоді дальність польоту снаряда

$$s = x_{\max} = 500\frac{866}{4{,}905} = 88300 \text{ м} = 88{,}3 \text{ км}.$$

Рекомендуємо самостійно розв’язати задачі: 12.2; 12.10; 12.12; 12.15; 12.17; 12.20; 12.23; 12.25 [4].

1.3. Питання для самоконтролю

1. Які змінні в кінематиці точки розглядають як незалежні?
2. Чи залежить вид траєкторії точки від вибору системи координат?
3. У чому суть основної задачі кінематики точки?
4. Як побудувати натуральний тригранник (тригранник Френе)?
5. Дати означення швидкості та прискорення точки.
6. Як визначається швидкість точки в декартовій системі координат?
7. Як визначається швидкість точки при натуральному способі задання руху?
8. Які обмеження накладаються на функції, що описують закон руху точки?
9. Чому дорівнює радіус кривини траєкторії в точці її перегину?
10. Які існують способи задання положення точки у просторі?
11. Як визначається прискорення точки при натуральному способі задання руху?
12. Як визначається прискорення точки в декартовій системі координат?

1.4. Тестові запитання та завдання

1.1

Поняття дугової координати точки та шлях, що пройшла точка, еквівалентні:
A. завжди
B. тільки у випадку прямолінійного руху точки
C. якщо рух точки здійснюється в одному напрямі

1.2

В кінематиці розглядаються три способи опису руху матеріальної точки: векторний, координатний, ………. .

1.3

Неперервна крива, яку описує точка при своєму русі, називається ………. точки.

1.4

Вкажіть закон руху матеріальної точки у векторній формі:

A. $s = s(t)$ B. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ C. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

1.5

Вкажіть закон руху матеріальної точки у координатній декартовій формі:

A. $s = s(t)$ B. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ C. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

1.6

Відомі координата x точки M і модуль її радіус-вектора $\vec{r}$. Вкажіть вираз для напрямного косинуса кута між вектором $\vec{r}$ і віссю OX: $\cos(\vec{r}, OX) =$...

A. x/r B. r/x C. $|x|/r$

1.7

Задано :$x = a\cos(kt)$; $y = a\sin(kt)$; $z = 0$. Знайдіть r.

A. $r = 0$. B.$r = a(\sin(kt) + \cos(kt))$. C.$r = a$.

1.8

Вкажіть зв'язок між векторним і координатним способами опису руху точки:

A. $s = \pm\int\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt$ B. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \overrightarrow{zk}$ C. $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

1.9

Кількість елементів, які треба задати для визначення положення точки в натуральній формі, дорівнює …….. .

1.10

Дугова координата точки змінюється за законом $s = 3\sin(\pi t)$. Вкажіть шлях σ, що проходить точка за одну секунду з моменту початку руху $(t = 0)$:

A.3 B. 3π C. 6 D. 6π

1.11

Вкажіть закон руху точки в натуральній формі:

A. $s = s(t)$ B. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ C. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

1.12

Вкажіть формулу, що зв'язує модуль диференціала дугової координати та диференціали координат точки:

A. $|ds| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ B.$|ds| = |dx + dy + dz|$
C.$|ds| = |dx| + |dy| + |dz|$

1.13

Площина, що проходить через точку перпендикулярно до дотичної, називється ………….. .

1.14

Лінія перетину нормальної та стичної площин визначає ………….. кривої.

1.15

Площина, що проходить через точку перепендикулярно до голової нормалі, називається ……….. .

1.16

Лінія перетину нормальної та спрямляючої площин визначає ………. кривої.

1.17

Система координатних осей з ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ з початком у рухомій точці M називається системою ………. осей.

1.18

Швидкість точки характеризує зміну:

A. модуля радіуса-вектора точки

B. напряму радіуса-вектора точки

C. модуля і напряму радіуса-вектора точки одночасно

1.19

Вектор швидкості точки спрямований по дотичній до ……. радіуса-вектора $\vec{r}$.

1.20

Відомі: $x(t), y(t), z(t), v(t)$. Вкажіть косинус кута між вектором швидкості точки $\vec{v}$ і віссю OX: $\cos(\vec{v}, OX) =$

A. $\dot{x}/_{\dot{y}}$ B. $\dot{x}/_{\dot{z}}$ C. $\dot{x}/_{v}$

1.21

Якщо модуль швидкості точки не змінюється за часом, то рух точки називаєьтся ……………. .

1.22

Рух точки називається рівномірним прямолінійним, якщо незмінними є:

A. тільки модуль швидкості точки

B. тільки напрям швидкості точки

C. одночасно модуль і напрям швидкості точки

Розділ 2
Кінематика твердого тіла

2.1. Найпростіші рухи твердого тіла

У кінематиці твердого тіла розглядають прості та складні рухи твердого тіла. До найпростіших рухів належать поступальний рух і обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Складні рухи – це плоскопаралельний, обертальний навколо нерухомої точки (сферичний), а також синтез рухів.

У кінематиці твердого тіла виникають задачі, в яких необхідно визначити характеристики руху самого твердого тіла, а також задачі, в яких необхідно визначити характеристики руху окремих його точок.

Перейдемо до розгляду окремих видів руху твердого тіла та методики розв'язування задач, маючи на меті показати розв'язування задач усіма можливими методами та звернути увагу на методику найбільш доцільного вибору методів розв'язування задач.

Поступальний рух твердого тіла. Поступальним називають такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі.

Теорема. *За поступального руху тіла всі точки описують однакові траєкторії, а також рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями.*

Отже, поступальний рух твердого тіла характеризується рухом однієї довільної його точки, а тому вивчення поступального руху тіла зводиться до вивчення руху однієї з його точок, тобто до кінематики точки.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий рух, за якого пряма, що проходить через будь-які дві точки тіла (наприклад O і O_1), під час руху тіла залишається нерухомою (рис. 2.1, *а*). Пряму OO_1 називають віссю обертання тіла.

За обертального руху навколо нерухомої осі положення тіла визначається кутом повороту φ, який змінюється за часом:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Зміну кута повороту φ за часом характеризує кутова швидкість ω (рад/с):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{2.1}$$

Якщо в умові задачі відома кількість обертів за хвилину n (рад/с), то

$$\omega = \frac{\pi n}{30}\,. \tag{2.2}$$

Зміну кутової швидкості за часом характеризує кутове прискорення ε (рад/с^2)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

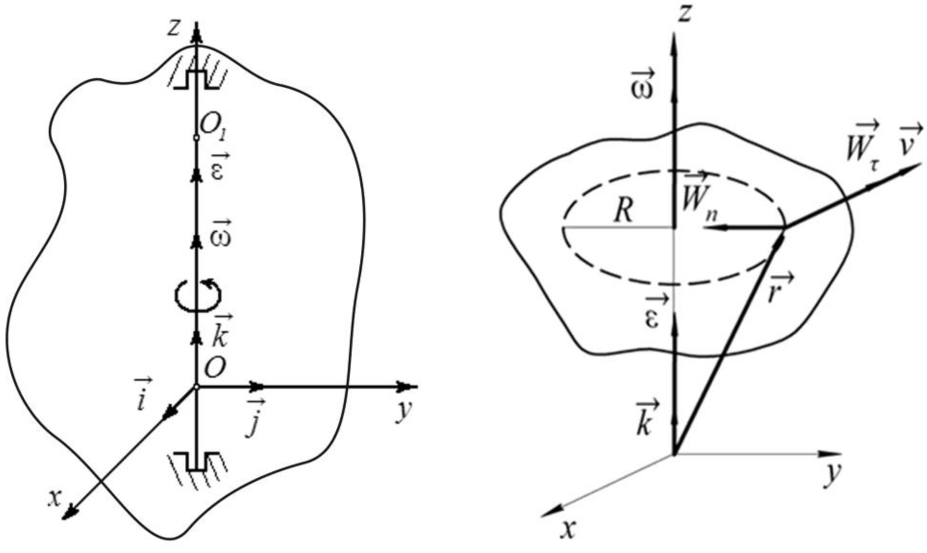
або

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{2.3}$$

Якщо $\varepsilon = 0$, то обертальний рух є рівномірним:

$$\omega = \text{const};$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$



а *б*

Рис. 2.1

Якщо тіло зробило N обертів, то його кут повороту (рад)

$$\varphi = 2\pi N.$$

Якщо $\varepsilon = \text{const}$, маємо рівнозмінний обертальний рух.

При цьому

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \tag{2.4}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + \varphi_0.$$

Кутову швидкість $\vec{\omega}$, як і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, зображують ковзними векторами, напрямленими вздовж осі обертання, а саме:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}, \tag{2.5}$$

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k}, \tag{2.6}$$

де $\vec{k}$– одиничний орт осі обертання (Oz). При цьому $\vec{\omega}$ напрямлений в той бік, звідки спостерігач бачить обертання тіла проти ходу годинникової стрілки.

Вирази (2.5) і (2.6) є кінематичними характеристиками руху твердого тіла.

Визначимо характеристики руху окремих точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Траєкторіями довільних точок тіла є кола різних радіусів з центрами на осі обертання. Закон руху точки по траєкторії

$$s = R\varphi = s(t),$$

де φ – кут повороту тіла навколо осі Oz; R – радіус обертання точки, тобто відстань від точки до осі обертання.

Оскільки відома траєкторія та закон руху по траєкторії, то рух точки можна вважати заданим натуральним способом. Тому швидкість точки

$$v = R\omega = R\dot{\varphi}. \tag{2.7}$$

Швидкість точки як вектор визначають за формулою Ейлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Отже, вектор швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії точки тіла в напрямку його обертання (рис. 2.1, *б*).

Якщо відомі координати точки x, y, z та проекції кутової швидкості на осі координат, то можна визначити швидкість точки за її проекціями:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y = -\omega y;$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z = -\omega x;$$

$$v_z = 0,$$

оскільки $\omega_x = \omega_y = 0$, а $\omega_z = \omega$.

Теорема. *Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень точки*

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n.$$

При цьому $\vec{W}_\tau \perp \vec{W}_n$.

Дотичне або тангенціальне прискорення точки

$$W_\tau = \dot{v}_\tau = R\dot{\omega} = R\varepsilon. \tag{2.8}$$

$\vec{W}_\tau$ напрямлений по дотичній до траєкторії точки тіла, тобто по $\vec{v}$.

Нормальне або доосьове прискорення

$$W_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2;$$

$\vec{W}_n$ напрямлений уздовж радіуса обертання від точки до осі обертання.

Оскільки $\vec{W}_\tau \perp \vec{W}_n$, то модуль повного прискорення точки

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2.9}$$

Напрямок вектора прискорення точки $\vec{W}$ визначають за формулою

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{2.10}$$

де α – кут, що його утворює повне прискорення з нормальним.

Зауважимо, що інколи дотичне прискорення точки тіла під час його обертання навколо нерухомої осі називають обертальним, а нормальне – доосьовим.

Розв'язуючи задачі на обертальний рух тіла навколо нерухомої осі, розрізняють такі типи задач:

1. Задачі, в яких потрібно визначати характеристики твердого тіла (кут повороту φ, кутову швидкість ω, кутове прискорення ε).

2. Задачі, в яких необхідно визначити характеристики руху окремих точок тіла (швидкість, прискорення).

3. Задачі на обертальні рухи коліс, зачеплених зовнішньо або внутрішньо. В цьому випадку швидкість у точці їх з'єднання спільна, а тому у разі внутрішнього зачеплення коліс (рис. 2.2)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \qquad (2.11)$$

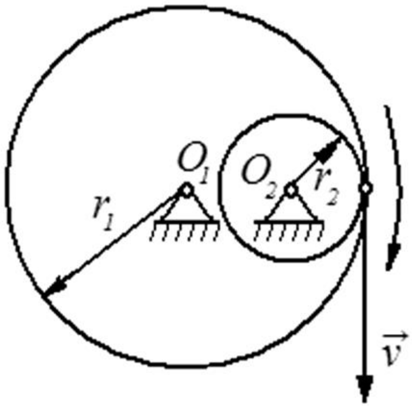


Рис. 2.2

у разі зовнішнього зачеплення коліс (рис. 2.3)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \qquad (2.12)$$

де ω_1, ω_2 – кутові швидкості коліс; r_1, r_2 – радіуси коліс; z_1, z_2 – кількість їх зубців. Тут знак «–» враховує протилежні напрямки обертань коліс.

4. Задачі змішаного типу. Тут також можуть бути прямі й обернені задачі $(a - e)$, у яких необхідно визначити:

а) у прямих задачах за відомим рівнянням руху $\varphi = \varphi(t)$ – характеристики обертального руху твердого тіла ω і ε;

б) в обернених задачах за відомим рівнянням $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – величини ω і φ:

$$\omega = \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)dt + C_1;$$

$$\varphi = \int_{t_0}^{t} \omega dt + C_2 = \int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)dt + C_1)dt + C_2;$$

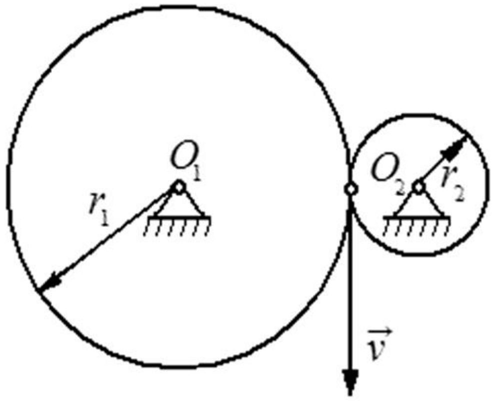


Рис. 2.3

в) за відомим $\varepsilon = \text{const}$ (рівнозмінний обертальний рух) – ω і φ. У цьому випадку користуємось формулами:

$$\omega = \int_{t_0}^{t} \varepsilon dt + C_1; \qquad (2.13)$$

$$\varphi = \int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{t} \varepsilon dt + C_1)dt + C_2; \qquad (2.14)$$

г) за відомою швидкістю точки – φ і s;

д) за відомим дотичним прискоренням точки W_τ – ω і v;

е) за відомим нормальним прискоренням W_n – ω і v.

Розглянемо задачі на обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.

Задача 17

Кут повороту парової турбіни під час її пуску пропорційний кубу часу. Визначити рівняння обертального руху турбіни, кутову швидкість та кутове прискорення, якщо відомо, що в момент часу $t = 3$ с кутова швидкість диска відповідає n = 810 об/хв.

Розв'язання

За умовою задачі рівняння руху диска має вигляд

$$\varphi = kt^3.$$

Кутова швидкість $\omega = \dot{\varphi} = 3kt^2$.

Щоб визначити коефіцієнт k, зазначимо, що в момент часу $t = 3$ с кутова швидкість

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 27\pi \quad \text{рад/с} .$$

Отже, дістанемо $27\pi = 3kt^2 = 3k \cdot 9 = 27k$, звідки $k = \pi$.

Отже, рівняння руху диска має вигляд

$$\varphi = \pi t^3,$$

де φ – кут повороту тіла (рад).

Кутова швидкість диска (рад/с) $\omega = \dot{\varphi} = 3\pi t^2$.

Кутове прискорення (рад/с^2) $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 6\pi t$.

Задача 18

Махове колесо починає обертатись зі стану спокою рівноприскорено. Через 10 хв після початку руху воно має кутову швидкість, що відповідає 120 об/хв. Визначити кутове прискорення колеса та кількість обертів колеса за ці 10 хв.

Розв'язання

Оскільки за умовою задачі рух колеса рівнозмінний, то скористаємось формулами (2.13) і (2.14), беручи до уваги те, що колесо почало рухатись зі стану спокою ($\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$).

Рівняння руху колеса мають вигляд

$$\omega = \varepsilon t; \; \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

де $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi$.

Знаючи кутову швидкість через 10 хв після початку руху, обчислимо кутове прискорення (рад/с^2):

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{600}.$$

Тоді

$$\varphi = \frac{4\pi t^2}{600\cdot 2} = \frac{2\pi t^2}{600}.$$

На основі виразу (2.2) визначимо кількість обертів колеса:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2\pi t^2}{2\pi 600} = \frac{600^2}{600} = 600 \text{ об.}$$

Задача 19

Під час крутильних коливань обертальний рух вала описується рівнянням

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \sin kt,$$

де φ_0, ω_0, k – сталі величини.

Визначити швидкість, дотичне та нормальне прискорення точки вала, що віддалена на відстань r від осі вала.

Розв'язання

Згідно з теорією обертального руху тіла навколо нерухомої осі визначимо кутову швидкість ω та кутове прискорення ε тіла:

$$\omega = \dot{\varphi} = \omega_0 + k\varphi_0 \cos kt;$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -k^2 \varphi_0 \sin kt.$$

Швидкість точки тіла знаходимо за формулою (2.7):

$$v = \omega r = r(\omega_0 + k\varphi_0 \cos kt).$$

Швидкість буде максимальною у ті моменти часу, для яких $\cos kt = 1$, тобто $v_{\max} = r(\omega_0 + k\varphi_0)$.

Нормальне прискорення

$$W_n = \omega^2 r = r(\omega_0 + k\varphi_0 \cos kt)^2.$$

Воно має максимум одночасно зі швидкістю (якщо $\cos kt = 1$)

$$W_{n_{\max}} = r(\omega_0 + k\varphi_0)^2.$$

Дотичне прискорення

$$W_\tau = |\varepsilon| r = k^2 \varphi_0 r \sin kt.$$

Максимальне значення його буде за $\sin kt = 1$, тобто

$$W_\tau = k^2 \varphi_0 r.$$

Задача 20

Махове колесо радіуса $R = 1$ м обертається рівноприскорено зі стану спокою. Через $t = 5$ с точки, які лежать на його ободі, мають лінійну швидкість $v = 50$ м/с. Визначити кутову швидкість колеса, нормальне і дотичне прискорення точки ободу, а також кут φ, на який воно повернулось, для моменту часу $t_2 = 20$ с.

Розв'язання

Скористаємося формулами для рівнозмінного обертального руху.

Спочатку обчислимо кутову швидкість колеса в момент часу $t_1 = 5$ с:

$$\omega_1 = \frac{v}{R} = \frac{50}{1} = 50 \text{ рад/с.}$$

Тоді кутове прискорення колеса

$$\varepsilon = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{50}{5} = 10 \text{ рад/с}^2 = \text{const.}$$

Тепер визначимо кутову швидкість колеса в момент часу $t_2 = 20$ с:

$$\omega_2 = \varepsilon t_2 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ рад/с.}$$

Оскільки за умовою задачі $\omega_0 = 0$, то швидкість точки у цей момент часу

$$v_2 = \omega_2 R = 200 \cdot 1 = 200 \text{ м/с.}$$

Нормальне і тангенціальне прискорення точки ободу становлять:

$$W_n = \omega_2^2 R = 200^2 \cdot 1 = 40000 \text{м/с}^2;$$

$$W_\tau = \varepsilon R = 10 \cdot 1 = 10 \text{ м/с}^2, \text{ а } \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{10 \cdot 20^2}{2} = 2000 \text{ рад.}$$

Задача 21

На махове колесо радіуса R з горизонтальною віссю намотано нитку, до якої підвішено вантаж P (рис. 2.4). У початковий момент часу вантаж перебуває в стані спокою на висоті h над горизонтальною поверхнею. В деякий момент часу вантаж починає падати зі сталим прискоренням W_0, приводячи в обертання колесо і через T секунд дотикається поверхні. Знайти кутове прискорення маховика ε, прискорення вантажу W_0, а також прискорення точок ободу колеса в момент, коли вантаж досягне поверхні.

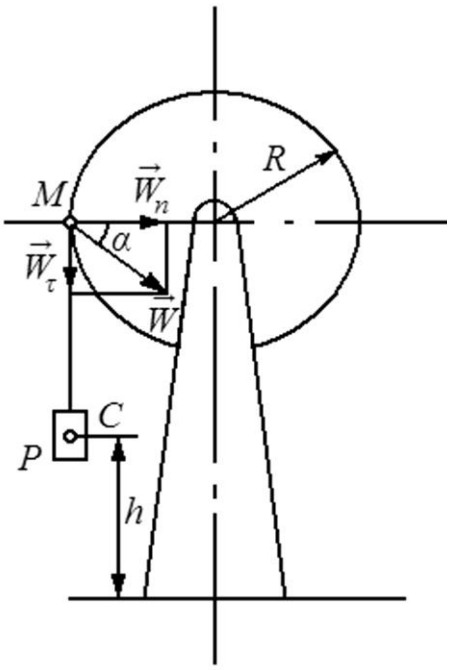


Рис 2.4

Розв'язання

Розглянемо рух вантажу і рух махового колеса.

Оскільки вантаж рухається поступально, то достатньо визначити характеристики будь-якої його точки, наприклад, центра ваги (точки C).

Рівняння руху точки C у такому русі

$$s = \frac{W_0 t^2}{2},$$

звідки знайдемо, що $W_0 = \frac{2s}{t^2}$.

У момент дотику вантажу поверхні, якщо $t = T$ і $s = h$, прискорення

$$W_0 = \frac{2h}{T^2}\,.$$

Прискорення вантажу і будь-якої точки нитки дорівнює тангенціальному прискоренню точки M колеса.

Тому маємо за формулою (2.8)

$$W_\tau = W_0 = \varepsilon R,$$

звідки знайдемо кутове прискорення колеса

$$\varepsilon = \frac{W_0}{R} = \frac{2h}{RT^2}\,.$$

Оскільки кутове прискорення стале, то обертальний рух колеса рівноприскорений. За формулою (2.4) визначаємо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

За умовою задачі $\omega_0 = 0$, тому

$$\omega = \varepsilon t = \frac{2h}{RT^2}t.$$

Отже, якщо $t = T$, то $\omega = \dfrac{2h}{RT}\,.$

Прискорення точки M колеса обчислимо за формулою (2.9):

$$W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = R\sqrt{\left(\frac{2h}{RT^2}\right)^2 + \left(\frac{2h}{RT}\right)^4} = \frac{2h}{T^2}\sqrt{1 + \frac{4h^2}{R^2}}.$$

Напрям вектора прискорення $\vec{W}$ знайдемо за кутом α між ним і нормаллю на основі співвідношення (2.10):

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\frac{2h}{RT^2}}{\frac{4h^2}{R^2T^2}} = \frac{R}{2h}\,.$$

Задача 22

Регулятор Уатта обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо вертикальної нерухомої осі. Стрижні OA, OB, AC і BC мають однакову довжину l = 10 см і утворюють з віссю кут $\varphi = 30°$ (рис. 2.5). Визначити кутову швидкість регулятора, якщо прискорення кульок $W = 100\,g$, де $g =$ 9,8 м/с^2 .

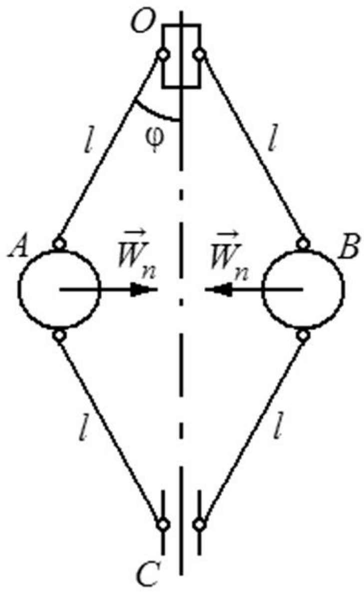


Рис. 2.5

Розв'язання

Оскільки регулятор обертається зі сталою кутовою швидкістю, то маємо рівномірний обертальний рух. При цьому $\varepsilon = 0$, тому повні прискорення точок A і B складаються лише з нормальної складової

$$W = W_n,$$

де $W_n = \omega^2 R = \omega^2 l \sin 30°$, а $W = 100\,g$, (тут $R = l \sin 30°$).

Отже, $100g = \omega^2 l \sin 30°$, звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{100\,g}{l \sin 30°}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9{,}8}{0{,}1 \cdot 0{,}5}} = 140 \ \text{рад/с}.$$

Задача 23

У двоступеневому редукторі ведуче зубчасте колесо *1* робить 4500 об/хв. Визначити кількість обертів за хвилину веденого вала, якщо кількості зубців коліс відповідно дорівнюють $z_1 = 20,\ z_2 = 40,\ z_3 = 30,\ z_4 = 60$ (рис. 2.6).

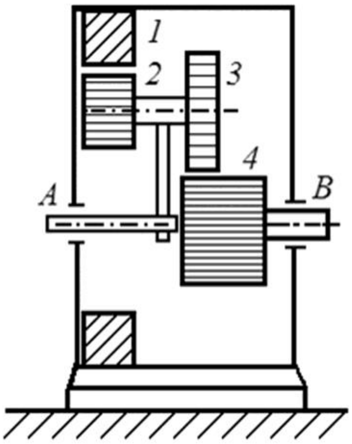


Рис. 2.6

Розв'язання

Оскільки колеса *1* і *2* перебувають у внутрішньому зачепленні, то в точці їх дотику вони мають однакову лінійну швидкість. Тому за формулою (2.11) маємо:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

або

$$n_1 z_1 = n_2 z_2.$$

Колесо *3*, будучи насадженим на спільну вісь із колесом *2*, має з ним однакові кутові швидкості, а саме: $\omega_3 = \omega_2$ або $n_3 = n_2 = \dfrac{n_1 z_1}{z_2}$.

Оскільки колесо *3* перебуває у зовнішньому зачепленні з колесом *4*, то за формулою (2.12)

$$\omega_3 R_3 = -\omega_4 R_4 \quad \text{або} \quad n_3 z_3 = -n_4 z_4,$$

звідки визначаємо кількість обертів колеса *4*:

$$n_4 = \frac{-n_3 z_3}{z_4} = \frac{-n_1 z_1 z_3}{z_2 z_4} = \frac{-4500 \cdot 20 \cdot 30}{40 \cdot 60} = -1125 \text{ об/хв}.$$

Із такою самою кількістю обертів за хвилину обертається ведений вал *B*. Знак «мінус» вказує на те, що вал *B* обертається за годинниковою стрілкою.

Задача 24

Пряма OA, яка обертається навколо нерухомої точки O зі сталою кутовою швидкістю ω, у точці M перетинає коло радіуса r, яке проходить через точку *O* (рис. 2.7). Визначити швидкість та прискорення точки M, а також скласти рівняння її руху по колу $s = s(t)$.

Розв'язання

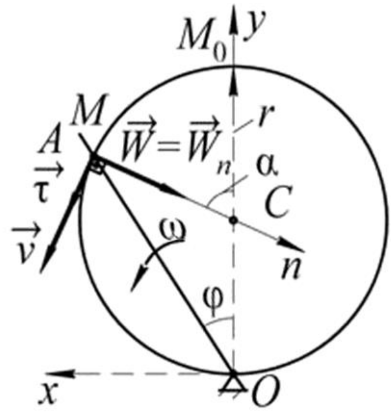


Рис. 2.7

Оскільки точка M, що належить прямій OA, яка обертається навколо точки O, рухається по колу, скористаємося натуральним способом задання руху точки для визначення її кінематичних характеристик. Для цього проведемо натуральні осі. Вісь τ напрямимо по дотичній до траєкторії в бік руху точки, а головну нормаль – по радіусу кола від точки M до його центра C. Положення точки M визначимо дуговою координатою, яка дорівнює M_0M.

Але $S = r\alpha = r2\varphi$, отже, $s = M_0M = 2r\varphi$.

Швидкість точки M знаходимо за формулою (1.7):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2r\varphi) = 2r\frac{d\varphi}{dt} = 2r\omega.$$

Вектор швидкості $\vec{v}$ напрямимо по дотичній до траєкторії точки в бік обертання прямої OA. Прискорення точки M дістаємо за формулою (1.8):

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n,$$

де $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, а $W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4r^2\omega^2}{r} = 4r\omega^2$.

Вектор $\vec{W}_n$ напрямлений до центра C кола (вздовж радіуса кривини).

Отже, прискорення точки M

$$W = 4r\omega^2,$$

а закон її руху $S = 2r\omega t$.

Цю задачу можна розв'язати також координатним способом, визначивши координати точки x_M і y_M. При цьому початок координат доцільно помістити у точку O, а осі x і y напрямити так, як показано на рис. 2.7.

Задача 25

Пряма AB, що проходить на відстані r від нерухомої точки O, обертається навколо осі O зі сталою кутовою швидкістю ω, перетинаючи при цьому нерухому пряму M_0N у точці M (рис. 2.8). Визначити швидкість і прискорення точки M у русі по прямій M_0N через кут обертання φ, відстань a від точки O до прямої M_0N і кутову швидкість ω.

Розв'язання

Оскільки пряма AB віддалена на відстань r від нерухомої точки O, то її центр обертання перемістився в точку K. Точка M прямої рухається по нерухомій прямій M_0N.

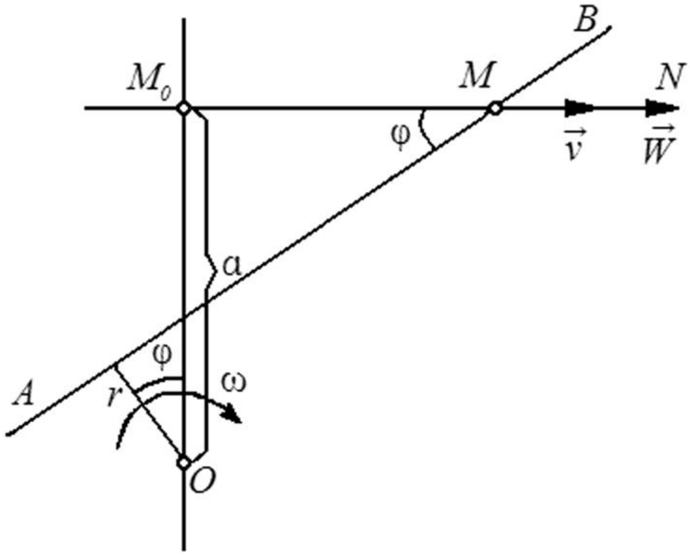


Рис. 2.8

Оскільки швидкість руху точки M $v = \frac{ds}{dt}$, то спочатку визначимо з трикутника $KM_0\ M$ шлях s, який проходить точка M.

Маємо:

$$s = M_0\ M = M_0K\text{ctg}\varphi = \left(a - \frac{r}{\cos\varphi}\right)\text{ctg}\varphi =$$

$$= \left(a - \frac{r}{\cos\omega t}\right)\text{ctg}\omega t = a \cdot \text{ctg}\omega t - \frac{r}{\sin\omega t},$$

де $\varphi = \omega t$.

Тоді

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\omega(a - r\cos\omega t)}{\sin^2\omega t} = \frac{\omega(a - r\cos\varphi)}{\sin^2\varphi}.$$

Вектор швидкості точки M напрямлений вздовж прямої M_0N.

Оскільки пряма AB обертається навколо точки K зі сталою кутовою швидкістю ω, то прискорення точки M дорівнює дотичному прискоренню, тобто $W = W_\tau$,

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega a}{\sin^2\omega t} - \frac{\omega r\cos\omega t}{\sin^2\omega t}\right) = \frac{2a\omega^2\cos\omega t}{\sin^3\omega t} - \frac{2\omega^2 r\cos^2\omega t}{\sin^3\omega t} -$$

$$-\frac{\omega^2 r\sin^2\omega t}{\sin^3\omega t} = \omega^2\left[\frac{2a\cos\omega t - r(1+\cos^2\omega t)}{\sin^3\omega t}\right]$$

або $$W = \omega^2\left[\frac{2a\cos\varphi - r(1+\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}\right].$$

Вектор прискорення точки $\vec{W}$ напрямлений вздовж рямої M_0N.

Рекомендуємо самостійно розв’язати задачі: 13.2; 13.3; 13.4; 13.5; 13.7; 13.9; 13.15; 13.18; 14.4; 14.5; 14.6; 14.18 [4].

2.2. Питання для самоконтролю

1. Які види руху твердого тіла називають найпростішими?
2. В чому полягає задання руху твердого тіла?
3. Який вид траєкторії мають точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
4. Який рух твердого тіла називають поступальним?
5. Який рух твердого тіла називають обертальним навколо нерухомої осі?
6. Які кінематичні характеристики у тіла при поступальному русі?
7. Які кінематичні характеристики у тіла при обертальному русі навколо нерухомої осі?
8. За якою формулою визначають швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
9. За якою формулою визначають прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
10. Яке прискорення точки називають обертальним? Який воно має напрям?
11. Яке прискорення точки називають доосьовим? Який воно має напрям?
12. За якою формулою можна перейти при обчисленні кутової швидкості від обертів за хвилину до радіанів за секунду?
13. Яке співвідношення між лінійними швидкостями має місце у механізмів із шестірнями?
14. Чи можна звести кінематику поступального руху твердого тіла до кінематики точки?

2.3. Тестові запитання та завдання

2.1

При поступальному русі твердого тіла пряма, що проходить через дві довільні точки цього тіла, переміщується ………..своєму початковому положенню.

2.2

Мінімальна кількість точок, що визначає поступальний рух твердого тіла, дорівнює ………… .

2.3

У випадку поступального руху твердого тіла:

A. $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$ B. $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$ C. $\omega = 0, \varepsilon = 0$

2.4

Для визначення положення в просторі тіла,що рухається поступально, треба задати …... незалежних параметра.

2.5

Якщо швидкості всіх точок тіла рівні між собою тільки у якийсь *момент* часу, то рух тіла називається миттєво- ………….

2.6

У випадку поступального руху твердого тіла всі його точки рухаються з ……… швидкостями і прискореннями.

2.7

У випадку поступального руху твердого тіла вектори прискорень $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ його точок A і B збігаються

A. тільки за модулем
B. тільки за напрямом
C. за модулем і за напрямом

2.8

У випадку поступального руху твердого тіла вектори прискорень $\vec{w}_A$ і $\vec{w}_B$ його точок A і B збігаються

A. тільки за модулем
B. тільки за напрямом
C. за модулем і за напрямом

2.9

Тіло рухається поступально тільки тоді коли :

A. тіло не обертається в просторі
B. всі точки тіла рухаються прямолінійно
C. прискорення всіх точок тіла дорівнюють нулю

2.10

Кількість параметрів, що визначає положення в просторі тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

A. 1 B.2 C.3

2.11

Якщо φ- кут повороту тіла, що обертається навколо нерухомої осі, то кінематичне рівняння руху тіла має вигляд:

A.$\varphi = const$ B.$\varphi = \varphi(t)$ C. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

2.12

Якщо з боку додатного напряму осі OZ, що збігається з віссю обертання тіла, перехід від нерухомої півплощини до зв'язаної з тілом рухомої півплощини відбувається проти ходу годинникової стрілки, то кут повороту тіла вважається ……… .

2.13

Кутова швидкість тіла характеризує зміну за часом ……. повороту тіла.

2.14

Вектор кутової швидкості тіла, що обертається навколо нерухомої осі, напрямлений ……….. осі обертання.

2.15

Величина кутової швидкості тіла ω_z, якщо воно обертається навколо нерухомої осі Oz (φ- кут повороту тіла), обчислюється за формулою:

A.$\omega_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} t$ B. $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ C.$\omega_z = \frac{\varphi}{t}$

2.16

Якщо $\omega = const$, то обертання тіла навколо нерухомої осі називається ……….. .

2.17

Вкажіть формулу для визначення швидкості точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

A.$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$ B.$v_M = \vec{\omega} \cdot \vec{r}$ C. $\vec{v}_M = \vec{r} \times \vec{\omega}$

2.18

У формулі для швидкості точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі (формула Ейлера), початок радіус-вектор $\vec{r}$ знаходиться

A. у будь-якій точці на осі

B. у будь-якій точці тіла

C. тільки у центрі кола, по якому рухається точка

2.19

Вкажіть проекцію векторного добутку $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$ на вісь Ox:

A. $\omega_x x$ B. $\omega_x y - \omega_y z$ C. $\omega_y z - \omega_z y$

2.20

Вкажіть проекцію векторного добутку $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$ на вісь Oy:

A. $y\omega_y$ B. $\omega_x - \omega_y z$ C. $\omega_y z - \omega_z x$

2.21

Вкажіть проекцію векторного добутку $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$ на вісь Oz:

A. $\omega_x y - \omega_y x$ B. $z\omega_z$ C. $\omega_z x - \omega_x y$

2.22

Вектор кутового прискорення характеризує зміну вектора кутової швидкості тіла:

A. тільки за величиною

B. тільки за напрямом

C. за величиною і за напрямом

2.23

При рівномірному обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

A. $\omega = 0$ B. $\varepsilon = 0$ C. $\omega \neq 0,\ \varepsilon \neq 0$

2.24

Якщо обертання тіла навколо нерухомої осі сповільнене, то вектор обертального прискорення точки тіла напрямлений протилежно вектору ……… цієї точки.

2.25

Вкажіть формулу для вектора обертального прискорення точки M тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

A.$\overrightarrow{W}_M^{\text{об}} = -\omega^2\vec{r}$ B. $\overrightarrow{W}_M^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ C. $\overrightarrow{W}_M^{\text{об}} = \vec{r} \times \vec{\varepsilon}$

2.26

Якщо R- відстань від точки до нерухомої осі, то обертальне прискорення точки M дорівнює:

A. $\omega^2 R$ B. ωR C. $R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$

2.27

Якщо R- відстань від точки до нерухомої осі, то доосьове прискорення точки M дорівнює:

A. $\omega^2 R$ B.εR C. $R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$

2.28

Якщо кутова швидкість тіла, що обертається навколо нерухомої осі, збільшиться в 3 рази, то доосьове прискорення точки збільшиться в …….. разів.

2.29

При обертанні тіла навколо нерухомої осі доосьове прискорення точки тіла одночасно може вважатися …….. прискоренням точки.

2.30

При обертанні тіла навколо нерухомої осі обертальне прискорення точки тіла одночасно можна вважати ……. прискоренням точки.

2.31

При обертанні тіла навколо нерухомої осі модуль прискорення M, що знаходиться на відстані R від осі обертання, можна обчислити за формулою:

A.$W_M = R(\varepsilon + \omega^2)$ B. $W_M = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ C. $W_M = R\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^4}$

2.32

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі вектор обертального прискорення точки спрямований по …… траєкторії точки.

2.33

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі вектор до осьового прискорення точки спрямований по ….. траєкторії точки.

Розділ 3

Складний рух точки

3.1. Теоретична та практична частина

Якщо точка M рухається в рухомій системі координат $O_1\xi\eta\zeta$, яка у свою чергу рухається відносно нерухомої системи координат $Oxyz$, то йдеться про складний рух точки (рис. 3.1).

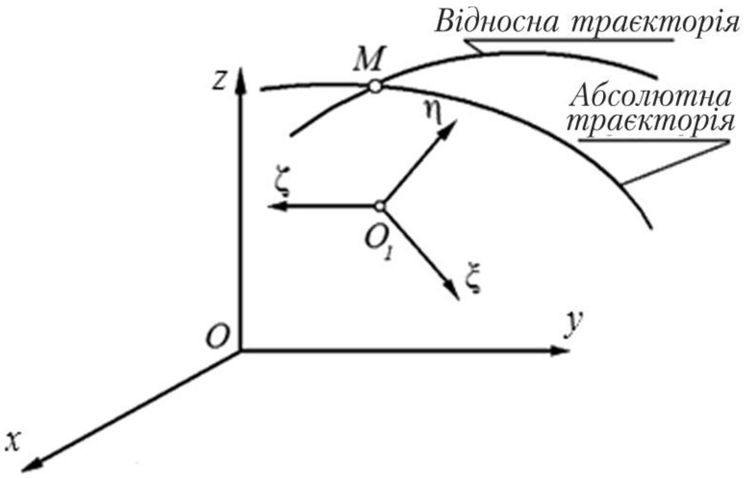


Рис. 3.1

Рух точки M у нерухомій системі координат $Oxyz$ називають абсолютним.

Рух точки M у рухомій системі координат $O_1\xi\eta\zeta$ називають відносним.

Переносним рухом цієї ж точки називається рух тієї точки рухомої системи координат, з якою в певний момент часу збігається точка, рух якої розглядається. Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення зв'язку між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів точки.

Розв'язування цієї задачі передбачає розділення абсолютного руху точки на відносний та переносний з аналізом кожного окремо.

Відносний рух можна визначити як такий *уявний* рух точки, за якого рухома система координат умовно зупинена, а переносний – як такий *умовний* рух точки, за якого *умовно* зафіксовано положення точки у рухомій системі координат (тобто відносного руху точки немає).

Сформулюємо теорему про додавання швидкостей у разі складного руху точки.

Теорема 1. *Абсолютна швидкість точки у складному русі дорівнює векторній сумі відносної та переносної швидкостей* (рис. 3.2):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{3.1}$$

За теоремою косинусів модуль абсолютної швидкості

$$\nu_a = \sqrt{\nu_r^2 + \nu_e^2 + 2\nu_r\nu_e\cos(\widehat{\vec{\nu}_r, \vec{\nu}_e})}.$$

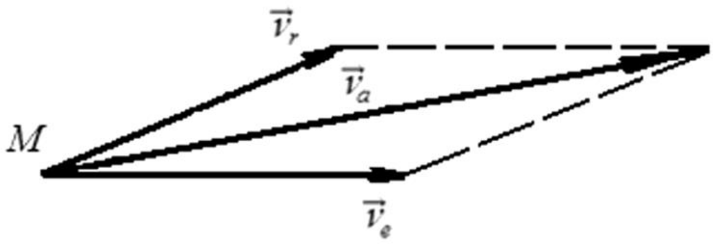


Рис. 3.2

Під абсолютною швидкістю точки розуміють її швидкість відносно нерухомої системи координат. Переносною швидкістю називають швидкість тієї точки рухомої системи координат, із якою в певний момент часу збігається точка, рух якої вивчаємо. Абсолютна швидкість напрямлена по дотичній до абсолютної траєкторії, відносна швидкість – по дотичній до відносної траєкторії.

Якщо в задачі необхідно визначити відносну швидкість, то, як видно з формули (3.1), потрібно геометрично скласти вектор абсолютної швидкості з вектором протилежно напрямленої переносної швидкості:

$$\vec{\nu}_r = \vec{\nu}_a + (-\vec{\nu}_e). \quad (3.2)$$

Слід зазначити, що незалежно від характеру переносного руху (поступального чи обертального) для визначення абсолютної швидкості точки справедлива формула (3.1).

Між тим, у випадку визначення абсолютного прискорення точки характер переносного руху відіграє важливу роль.

Якщо абсолютний і відносний рухи точки задано в координатній формі, тобто:

$$x = x(t);$$
$$y = y(t);$$
$$z = z(t),$$

то ці рівняння визначають абсолютний рух точки і одночасно в параметричній формі рівняння абсолютної траєкторії точки. Абсолютна швидкість у цьому випадку і абсолютне прискорення точки визначають за їх проекціями:

$$\begin{aligned} \nu_{ax} &= \dot{x}; \\ \nu_{ay} &= \dot{y}; \\ \nu_{az} &= \dot{z}; \\ w_{ax} &= \dot{\nu}_{ax} = \ddot{x}; \\ w_{ay} &= \dot{\nu}_{ay} = \ddot{y}; \\ w_{az} &= \dot{\nu}_{az} = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Модулі $\vec{\nu}_a$ і $\vec{w}_a$ відповідно, визначають,так:

$$\nu_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$
$$w_a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$
а їх напрямки – за напрямними косинусами.

Рівняння відносного руху точки мають вигляд:

$$\xi = \xi(t); \quad \eta = \eta(t); \quad \zeta = \zeta(t). \tag{3.4}$$

Одночасно в параметричній формі рівняння (3.4) визначають рівняння відносної траєкторії.

Відносну швидкість і відносне прискорення точки визначають за їх проекціями на рухомі осі координат:

$$\nu_{r\xi} = \dot{\xi};$$
$$\nu_{r\eta} = \dot{\eta};$$
$$\nu_{r\zeta} = \dot{\zeta};$$
$$w_{r\xi} = \dot{\nu}_{r\xi} = \ddot{\xi};$$
$$w_{r\eta} = \dot{\nu}_{r\eta} = \ddot{\eta};$$
$$w_{r\zeta} = \dot{\nu}_{r\zeta} = \ddot{\zeta}.$$

Відповідно їх модулі:

$$\nu_r = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2};$$
$$w_r = \sqrt{\ddot{\xi}^2 + \ddot{\eta}^2 + \ddot{\zeta}^2}.$$

Напрями $\vec{\nu}_r$ і $\vec{w}_r$ визначають за напрямними косинусами.

Якщо переносний рух поступальний, то переносна швидкість і переносне прискорення точки дорівнюють відповідно швидкості та прискоренню початку рухомої системи координат O_1 (рис. 3.1):

$$\vec{\nu}_{eM} = \vec{\nu}_{O1}\ ; \vec{w}_{eM} = \vec{w}_{O_1}.$$

У випадку обертального руху рухомої системи координат навколо початку координат O_1 (рис. 3.3) переносна швидкість точки

$$\vec{\nu}_{eM} = \vec{\nu}_{O1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ за формулою Ейлера визначає швидкість точки M в обертальному русі навколо точки O_1.

Відповідно переносне прискорення $\vec{w}_{eM}$ буде дорівнювати:

$$\vec{w}_{eM} = \vec{w}_{O_1} + \vec{w}_{O_1M}, \tag{3.5}$$

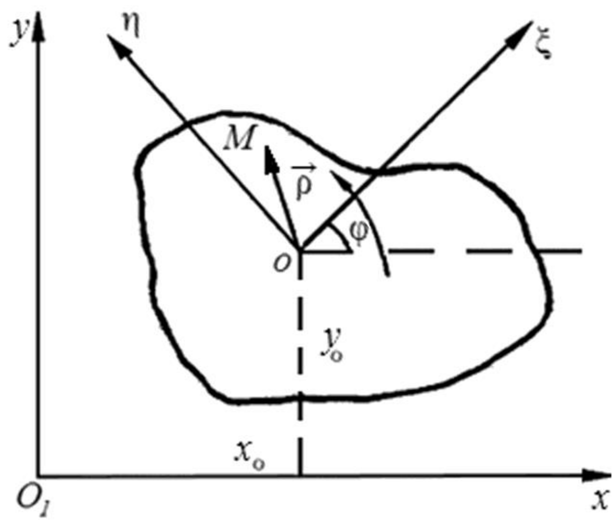


Рис. 3.3

де $\vec{w}_{O_1M}$ – прискорення точки в її обертанні навколо точки O_1.

Теорема 2 (теорема Коріоліса). *Абсолютне прискорення точки у складному русі дорівнює векторній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень:*

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c. \qquad (3.6)$$

Тут $\vec{w}_c$ – прискорення Коріоліса, яке виникає внаслідок відносного руху точки M і певної зміни орієнтації рухомої системи координат відносно нерухомої:

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \qquad (3.7)$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху; $\vec{v}_r$ – відносна швидкість точки.

За модулем прискорення Коріоліса

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}\right). \qquad (3.8)$$

Зауважимо, що прискорення Коріоліса також називають поворотним.

Із формули (3.8) видно, що прискорення Коріоліса може дорівнювати нулю у трьох випадках:

1) якщо переносний рух поступальний, тобто $\omega_e = 0$;

2) якщо v_r у заданий момент часу дорівнює нулю;

3) якщо вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ паралельні, тоді

$$\sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}\right) = 0.$$

Напрям $\vec{w}_c$ визначається за правилом векторного добутку двох векторів (3.7).

У випадку різних складних рухів точки, визначаючи $\vec{v}_a$ і $\vec{w}_a$, користуються формулами (3.1) і (3.6). Тому під час розгляду наступних розділів кінематики твердого тіла, зокрема у випадках плоского руху, синтезу руху, тобто коли рух твердого тіла складається з двох обертальних рухів, для визначення прискорення точок тіла використовують теорему Коріоліса.

Вивчаючи складний рух точки і розв'язуючи задачі, можемо мати такі окремі випадки, коли потрібно визначити:

1) за рівнянням руху точки – швидкість і прискорення;

2) за відомими швидкостями – рівняння руху;

3) за відомими абсолютною і переносною швидкостями – відносну швидкість;

4) за відомими швидкостями – прискорення точки;

5) за даними задачі – прискорення Коріоліса.

Задача 26

Прямокутник *ABCD* обертається навколо сторони *AB* за законом $\varphi = 10t - 2t^2$. Уздовж сторони *CD* рухається точка *M* за законом $\xi = a\cos\frac{\pi}{2}t$ (рис. 3.4). Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки в момент часу $t = 1$ с, якщо $AD = BC = a$.

Розв’язання

За умовою задачі рух точки M складний. Уведемо дві системи координат: нерухому $xOyz$ і рухому $\xi A\eta\zeta$. Останню жорстко пов’яжемо з прямокутником $ABCD$, уздовж сторони CD якого рухається точка M (рис. 3.4).

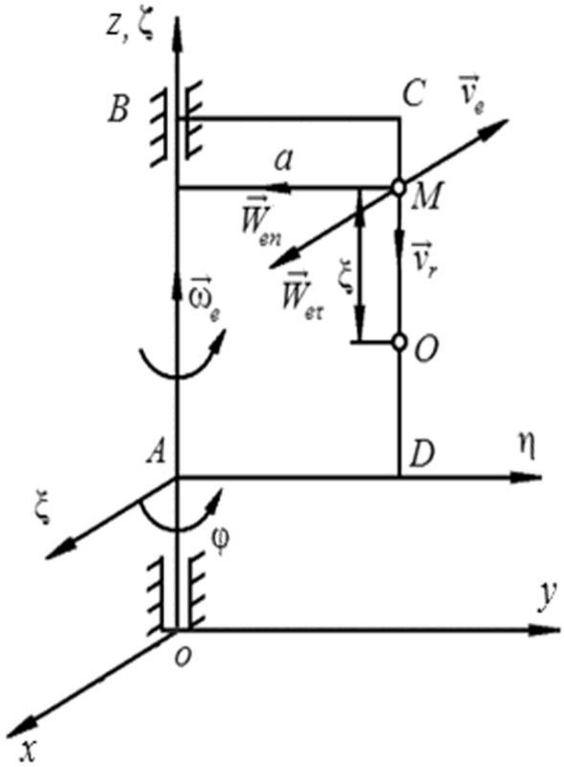


Рис. 3.4

Для визначення відносного руху точки M уявно зупинимо переносний рух, тобто рухому систему координат (прямокутник $ABCD$).

Відносним рухом точки M є її прямолінійний рух уздовж сторони CD.

Обчислимо відносну швидкість і відносне прискорення точки за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямолінійній траєкторії. Відповідно, відносна швидкість точки M

$$v_r = \dot{\xi} = -a\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

У момент $t = 1$с

$$v_r = -\frac{a\pi}{2}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що вектор відносної швидкості $\vec{v}_r$ має напрям від M до O.

Для визначення кінематичних характеристик переносного руху точки уявно зупиняємо її відносний рух. Тоді переносними швидкістю і прискоренням точки M будуть швидкість і прискорення тієї точки прямокутника $ABCD$, з якою в заданий момент часу збігається рухома точка M. Оскільки прямокутник здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі (сторони AB), обчислимо його кутові швидкість та прискорення за формулами (2.1) і (2.3):

$$\omega = \dot{\varphi} = 10 - 4t.$$

Якщо $t = 1$ с, то $\omega = 10 - 4 = 6\,\text{рад/с}$;

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = -4\,\text{рад/с}^2.$$

Від’ємне значення ε вказує на те, що прямокутник обертається з гальмуванням.

Переносна швидкість (см/с) в заданий момент часу

$$v_e = \omega r = 6a.$$

Переносна швидкість точки $\vec{v}_e$ напрямлена перпендикулярно до радіуса r.

Абсолютна швидкість (см/с) за теоремою 1

$\nu_a = \sqrt{\nu_r^2 + \nu_e^2} = \sqrt{\frac{a^2\pi^2}{4} + 36a^2} = a\sqrt{38{,}46} = 6{,}2a.$

Оскільки відносний рух є прямолінійним, то відносне прискорення

$$w_r = \frac{d\nu_r}{dt} = -\frac{a\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}t.$$

Якщо $t = 1\text{с}$, то $w_r = 0$.

Оскільки переносний рух прямокутника навколо нерухомої осі обертальний, то переносне прискорення його точки M обчислимо за формулою (2.9):

$$\vec{w}_e = \vec{w}_{e\tau} + \vec{w}_{en};$$

$$\text{де } w_{e\tau} = \varepsilon r = -4a;$$

$$\text{а } w_{en} = \omega^2 r = 6^2 a = 36a.$$

Вектор $\vec{w}_{e\tau}$ напрямлений протилежно $\vec{\nu}_e$, а $\vec{w}_{en}$ до осі обертання від точки M.

Оскільки $\vec{w}_{e\tau} \perp \vec{w}_{en}$, то

$$w_e = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a\sqrt{(-4)^2 + 6^4} = a\sqrt{16 + 1296} = a\sqrt{1312} = 37{,}5a \text{ см/с}^2.$$

Прискорення Коріоліса $w_c = 0$, оскільки вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\nu}_r$ паралельні.

Отже, абсолютне прискорення точки M у момент $t = 1\text{с}$

$$w_a = w_e = 37{,}5a \text{ см/с}^2.$$

Задача 27

Знайти рівняння руху і траєкторію вільного падіння тіла відносно вертикальної пластинки, яка рухається горизонтально і рівномірно зі швидкістю $\vec{u}$.

У початковий момент часу тіло перебувало в початку координат і не мало швидкості.

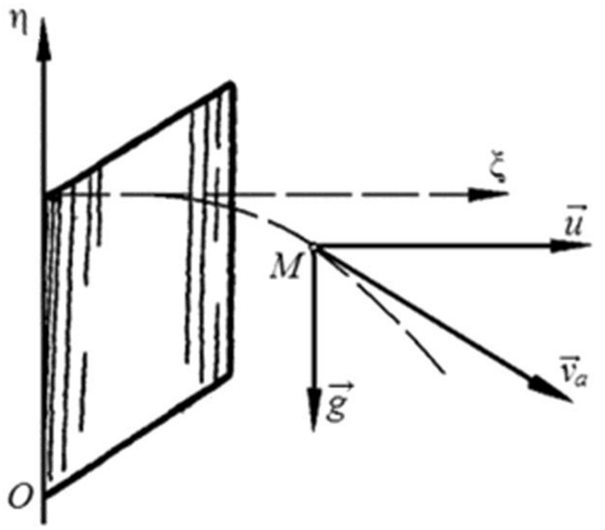


Рис. 3.5

Розв'язання

Оскільки пластинка рухається прямолінійно і рівномірно зі швидкістю $\vec{u}$, то, пов'язуючи з пластинкою рухому систему координат $\xi O_1 \eta$ (рис. 3.5), визначаємо, що переносний рух точки є рівномірним і прямолінійним, а тому переносна швидкість точки M

$$\nu_{eM} = u.$$

Переносне прискорення точки $w_e = 0$, оскільки $u = \text{const}$.

За умовою задачі потрібно визначити рівняння відносного руху

$$\xi = \xi(t) \text{ і } \eta = \eta(t).$$

Відоме абсолютне прискорення точки M $w_a = \mathrm{g}$.

Абсолютна швидкість точки M

$$\vec{\mathrm{v}}_a = \vec{\mathrm{v}}_r + \vec{\mathrm{v}}_e.$$

Проекції $\vec{\mathrm{v}}_a$ відповідно на осі $O_1\xi$ і $O_1\eta$ дорівнюють:

$$\mathrm{v}_{a\xi} = \mathrm{u} + \dot{\xi};$$
$$\mathrm{v}_{a\eta} = \dot{\eta}.$$

Абсолютне прискорення точки M

$$\vec{w}_a = \vec{w}_{\mathrm{e}} + \vec{w}_r + \vec{w}_c.$$

Оскільки $\vec{w}_{\mathrm{e}} = 0$ і $\vec{w}_{\mathrm{c}} = 0$ (адже переносний рух є поступальним), то

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r.$$

Проекції $\vec{w}_a$ на осі $\mathrm{O}_1\xi$ і $\mathrm{O}_1\eta$ мають такий вигляд:

$$w_{a\xi} = w_{r\xi} = \ddot{\xi};$$
$$w_{a\eta} = w_{r\eta} = \ddot{\eta}.$$

Оскільки $w_{a\xi} = 0$, а $w_{a\eta} = -\mathrm{g}$, отримаємо:

$$\ddot{\xi} = 0;$$
$$\ddot{\eta} = -\mathrm{g}.$$

Інтегруючи, маємо:

$$\dot{\xi} = \mathrm{c}_1;$$
$$\xi = \mathrm{c}_1\mathrm{t} + \mathrm{c}_2;$$
$$\dot{\eta} = -\mathrm{gt} + \mathrm{c}_3;$$
$$\eta = -\frac{\mathrm{gt}^2}{2} + \mathrm{c}_3\mathrm{t} + \mathrm{c}_4.$$

Виходячи з початкових умов, якщо $t = 0$, то

$$\xi_0 = 0, \;\; \eta_0 = 0, \;\; \dot{\xi}_0 = u; \;\; \dot{\eta}_0 = 0.$$

Знаходимо

$$\mathrm{c}_1 = u, \;\; \mathrm{c}_2 = \mathrm{c}_3 = \mathrm{c}_4 = 0.$$

Отже, після підставляння значень сталих інтегрування, отримаємо рівняння руху:

$$\xi = ut;$$
$$\eta = -\frac{\mathrm{gt}^2}{2}.$$

Вилучаємо параметр t, тоді

$$\eta = -\frac{\mathrm{g}\xi^2}{2\mathrm{u}^2},$$

тобто відносна траєкторія точки M – парабола.

Задача 28

Потяг рухається рівномірно зі швидкістю 30 км/год. Сигнальний ліхтар, підвішений до останнього вагона, відривається від кронштейна. Визначити траєкторію абсолютного руху ліхтаря і шлях S, який пройде потяг за час падіння ліхтаря, якщо ліхтар підвішено на висоті 4,905 м над землею. Осі координат провести через початкове положення ліхтаря: вісь Ox – горизонтально в бік руху, вісь Oy – вертикально вниз.

Розв'язання

Оскільки потяг рухається рівномірно, прямолінійно і поступально, то пов'язуємо з ним рухому систему координат xOy, як указано в умові задачі. Нерухому систему координат пов'яжемо із землею (рис. 3.6).

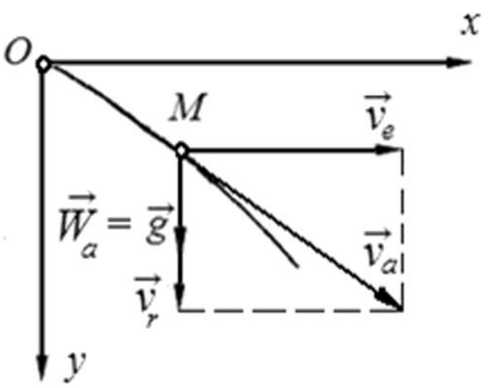


Рис. 3.6

Отже, переносний рух є рівномірним, прямолінійним і поступальним. Тоді переносна швидкість точки M (ліхтаря) дорівнює швидкості, наприклад, з якою рухається початок рухомої системи координат, тобто

$$v_e = v = 30\,\text{км/год} = 8\frac{1}{3}\ \text{м/с}.$$

Прискорення $w_e = \dot{v} = 0$, оскільки $v = \text{const}$.

Прискорення Коріоліса $w_c = 0$, оскільки переносний рух поступальний, тобто $\omega_e = 0$.

Отже, абсолютне прискорення точки M

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r.$$

Проекції $\vec{w}_a$ на осі координат можна визначити за формулами (3.3):

$$w_{ax} = w_{rx} = \ddot{x};$$
$$w_{ay} = w_{ry} = \ddot{y}.$$

Оскільки ліхтар вільно падає, то абсолютне прискорення $w_a = g$, а проекції його на осі координат

$$\ddot{x} = 0;$$
$$\ddot{y} = g.$$

Інтегруючи ці вирази, отримаємо:

$$\dot{x} = c_1;$$

$$x = c_1 t + c_2;$$

$$\dot{y} = gt + c_3;$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Сталі інтегрування визначимо з початкових умов, якщо $t = 0$:

$$x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ \dot{x}_0 = \text{v};\ \dot{y}_0 = 0.$$

Маємо: $c_1 = \text{v},\ c_2 = c_3 = c_4 = 0.$

Рівняння руху ліхтаря

$$x = \text{v}t;$$

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Вилучаючи з останніх рівнянь параметр t, отримаємо рівняння траєкторії ліхтаря:

$$y = \frac{\text{g}x^2}{2\text{v}^2} = \frac{9{,}8 \cdot x^2}{2 \cdot (8\frac{1}{3})^2} = 0{,}0706x^2.$$

Отже, траєкторія ліхтаря – парабола.

Визначимо проміжок часу падіння ліхтаря на землю з висоти h:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{\text{g}}} = \sqrt{\frac{2h}{\text{g}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}905}{9{,}81}} = 1 \text{ с}.$$

Шлях, пройдений потягом за час падіння ліхтаря,

$$S = \int_0^{\text{t}} \text{v}dt = \text{v}t = 8\frac{1}{3} \cdot 1 = 8\frac{1}{3} \text{ м}.$$

Задача 29

Корабель пливе на південь зі швидкістю $30\sqrt{2}$ км/год. Другий корабель рухається курсом на південний схід зі швидкістю 30 км/год. Визначити величину і напрям швидкості другого корабля, яку визначить спостерігач, що перебуває на палубі першого корабля.

Розв’язання

Пов’яжемо рухому систему координат $\xi O\eta$ з першим кораблем. Тоді рух другого корабля відносно першого буде відносним. Переносним рухом буде поступальний рух рухомої системи, пов’язаної з першим кораблем. Абсолютну швидкість другого корабля визначаємо за формулою (3.1):

$$\vec{\text{v}}_a = \vec{\text{v}}_\text{e} + \vec{\text{v}}_r.$$

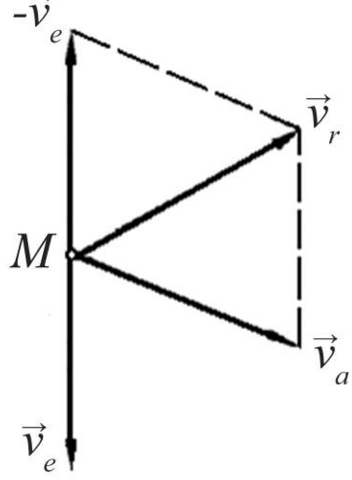


Рис. 3.7

За умовою задачі $\vec{\text{v}}_a$ має напрям на південний схід (рис. 3.7).

За модулем $v_e = 30\sqrt{2}$ км/год.

За модулем v_a= 30 км/год. Потрібно визначити відносну швидкість $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a + (-\vec{v}_e).$$

Для цього додамо до вектора $\vec{v}_a$ вектор $\vec{v}_e$, напрямлений на північ (рис. 3.7).

За модулем

$$v_r = \sqrt{{v_a}^2 + {v_e}^2 + 2v_a v_e \cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 30^2 + 2 \cdot 30^2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 2 \cdot 30^2 - 2 \cdot 30^2} = 30 \text{ км/год.}$$

З рис. 3.7 робимо висновок, що $\vec{v}_r$ має напрям на північний схід.

Задача 30

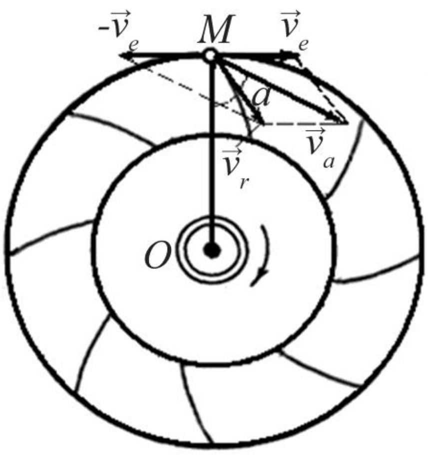


Рис. 3.8

У гідравлічній турбіні вода з напрямного апарата попадає в обертове робоче колесо, лопатки якого, щоб запобігти удару, поставлені проти входу води так, щоб відносна швидкість $\vec{v}_r$ дотикалась лопатки (рис. 3.8).

Знайти відносну швидкість частинки води на зовнішньому ободі колеса (в момент входу), якщо її абсолютна швидкість під час входу v_a= 15 м/с; кут між абсолютною швидкістю і радіусом $\alpha = 60°$, радіус входу *OM* = *r* = 2 м, кутова швидкість колеса відповідає *n* = 30 об/хв.

Розв'язання

Для визначення відносної швидкості скористаємося формулою (3.2):

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a + (-\vec{v}_e).$$

Знайдемо переносну швидкість $\vec{v}_e$.

Пов'язуючи рухому систему координат із колесом, робимо висновок, що переносним рухом точки *M* є обертальний рух колеса навколо осі *O* з кутовою швидкістю (рад/с):

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 30}{30} = \pi.$$

Отже, переносна швидкість точки *M*

$$v_e = \omega r = 2\pi \text{ (м/с)} = 6{,}28 \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{v}_e$ напрямлено нормально до радіуса *OM* у бік обертання.

Відклавши в протилежному напрямку вектор $\vec{v}_e$, за правилом паралелограма додамо швидкості $\vec{v}_a$ і $(-\vec{v}_e)$. Відносна швидкість $\vec{v}_r$ напрямлена по діагоналі паралелограма.

Модуль ν_r визначаємо за теоремою косинусів:

$$\nu_r = \sqrt{\nu_a^2 + \nu_e^2 + 2\nu_a\nu_e\cos\left(\widehat{\vec{\nu}_a, -\vec{\nu}_e}\right)} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 6{,}28^2 + 2\cdot 15\cdot 6{,}28\cos 150^\circ} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 6{,}28^2 - 2\cdot 15\cdot 6{,}28\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10{,}06\ \text{м/с}.$$

Задача 31

Визначити кутову швидкість куліси при чотирьох положеннях кривошипу – двох вертикальних і двох горизонтальних, якщо $OO_1 = a = 60$см, $OA = l = 80$см, і кутова швидкість кривошипа відповідає n = 30 об/хв (рис. 3.9).

Розв'язання

Виберемо дві системи координат. За початок нерухомої системи виберемо точку O. Вісь Oy напрямимо вздовж OO_1. За початок рухомої системи координат виберемо точку O_1, а вісь $O_1\eta$ напрямимо вздовж куліси O_1B (рис. 3.9). Точка *A* належить кривошипу і бере участь разом із ним в обертальному русі навколо осі *O*. Цей рух відбувається в нерухомій системі координат *xOy* і є абсолютним.

Абсолютна швидкість точки *A* напрямлена нормально до кривошипа *OA* і чисельно дорівнює

$$\nu_a = \omega\cdot l = \frac{\pi n}{30}\cdot 80 = \frac{\pi\cdot 30\cdot 80}{30} =$$
$$= 80\pi\ \text{см/с}.$$

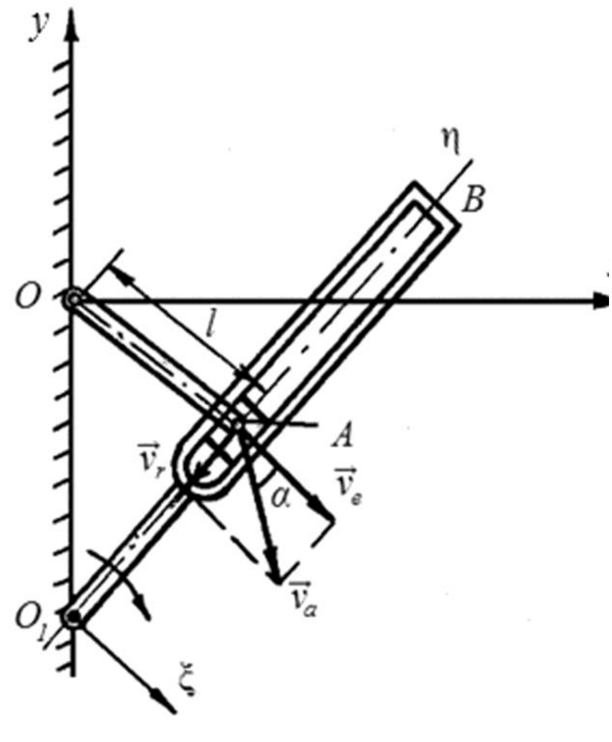


Рис. 3.9

Точка *A* рухається вздовж осі $O_1\eta$. Отже, відносний рух точки *A* є прямолінійним. Відносна швидкість напрямлена по осі $O_1\eta$. Переносним рухом є рух точки *A* разом із віссю $O_1\eta$, яка обертається навколо осі $O_1\xi$ з кутовою швидкістю ω_1, яку треба визначити. Переносна швидкість точки *A* нормальна до O_1A і дорівнює:

$$\nu_e = O_1A\omega_1.$$

Але, виходячи з рис. 3.9, маємо:

$$v_e = v_a \cos\alpha.$$

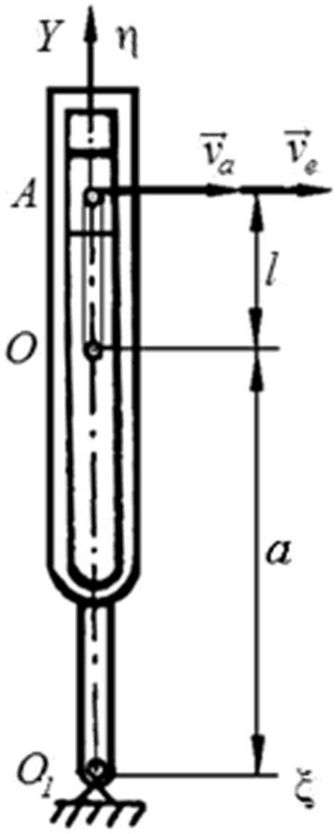


Рис. 3.10

Отже,

$$O_1A\omega_1 = v_a \cos\alpha,$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{v_a \cos\alpha}{O_1A} = \frac{80\pi\cos\alpha}{O_1A}.$$

Обчислимо кутову швидкість ω_1 куліси в чотирьох положеннях кривошипа *OA*.

Для першого вертикального положення кривошипа (рис. 3.10):

$$v_a = v_e;\ \alpha = 0;\ O_1A = a + l = 60 + 80 = 140 \text{ см},$$

$$\omega_{1_{\text{I}}} = \frac{80\pi\cos 0°}{140} = \frac{4}{7}\pi \text{ рад/с}.$$

Для другого горизонтального положення кривошипа *OA* (рис. 3.11):

$$O_1A = \sqrt{a^2 + l^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ см};$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{O_1A} = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}.$$

Отже,

$$\omega_{1\text{II}} = \frac{80\pi\cdot\frac{4}{5}}{100} = \frac{16}{25}\pi = 0{,}64\pi \text{ рад/с}.$$

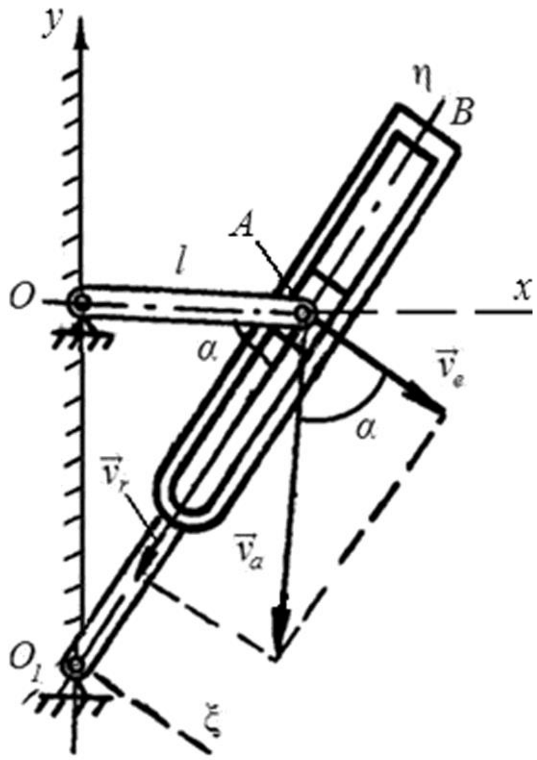


Рис. 3.11

Для третього вертикального положення (рис. 3.12): $\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$;

$$O_1A = 80 - 60 = 20 \text{ см};\ \ \omega_{1\text{III}} = \frac{80\pi\cdot 1}{20} = $$
$$= 4\pi \text{ рад/с}.$$

Кутову швидкість куліси у четвертому горизонтальному положенні кривошипа знаходимо аналогічно, як і в другому положенні:

$$\omega_{1\text{IV}} = 0{,}64\pi \text{ рад/с}.$$

Задача 32

Компресор з криволінійними каналами рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі *O* (рис. 3.13). Повітря рухається по каналах зі сталою відносною швидкістю v_r. Визначити проекції абсолютної швидкості й абсолютного прискорення на осі координат частинки повітря, що розміщена в точці C каналу, якщо радіус кривини каналу в точці C дорівнює ρ, кут між нормаллю до кривої AB в точці C і радіусом CO дорівнює φ. Радіус CO дорівнює r.

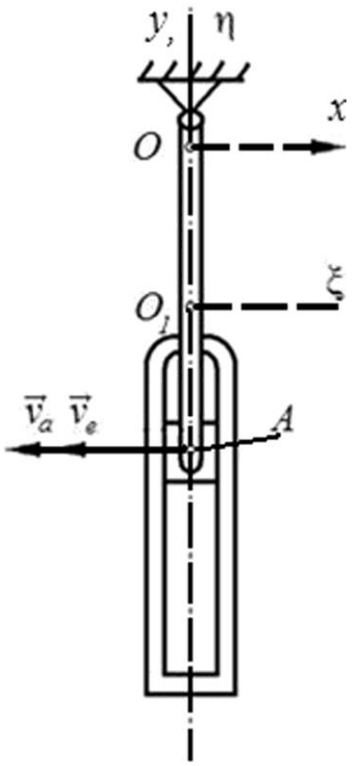


Рис 3.12

Розв'язання

З умови задачі робимо висновок, що точка C перебуває у складному русі.

Зв'яжемо рухомі осі $\xi O\eta$ з компресором. Тоді переносним рухом є обертальний рух тіла навколо осі O, перпендикулярній до площини рисунка.

Відносним рухом є рух точки C по криволінійній траєкторії AB каналу.

Отже, на основі теореми про додавання швидкостей маємо:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Переносна швидкість точки $v_e = \omega\, OC = \omega\, r$.

Вектор $\vec{v}_e$ напрямлений нормально до радіуса r у бік обертання компресора.

Проекції абсолютної швидкості точки на осі координат:

$$v_{a\xi} = v_r \cos\varphi + \omega r;$$

$$v_{a\eta} = v_r \sin\varphi.$$

Абсолютне прискорення точки C визначимо за теоремою Коріоліса:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c.$$

Оскільки відносний рух точки C є криволінійним і рівномірним, то $w_{r\tau} = 0$, а $\vec{w}_r = \vec{w}_{rn}$.

Його модуль $w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = w_r$.

Відносне прискорення точки напрямлене по радіусу кривини каналу до центра кривини.

Переносне прискорення точки C визначимо за формулою

$$\vec{w}_e = \vec{w}_{en} + \vec{w}_{e\tau},$$

де $w_{en} = \omega^2 OC = \omega^2 r$, $w_{e\tau} = \varepsilon\, OC = 0$, оскільки $\omega = \text{const}$, отже, $w_e = w_{en} = \omega^2 r$.

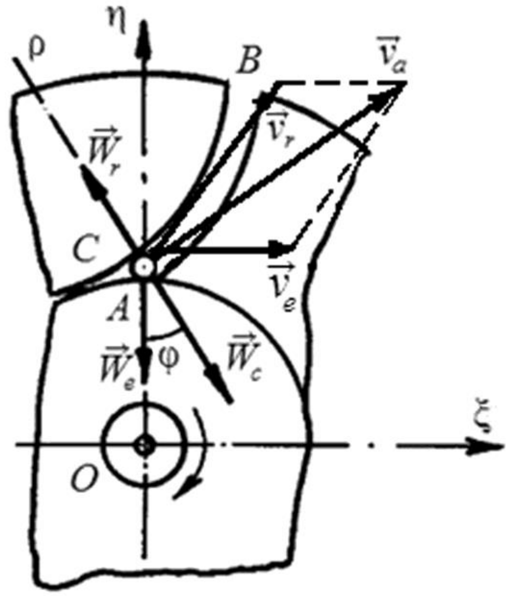


Рис. 3.13

Переносне прискорення $\vec{w}_e$ напрямлене вздовж радіуса OC до осі обертання.

Прискорення Коріоліса

$$w_c = 2\omega_e \nu_r \sin 90° = 2\omega \nu_r.$$

Оскільки вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини рисунка і напрямлений від нас, то прискорення Коріоліса лежить у площині рис. 3.13 і напрямлене в ту частину простору, звідки видно поворот на найменший кут від вектора $\vec{\omega}$ до вектора $\vec{v}_r$ проти годинникової стрілки.

Проекції абсолютного прискорення точки на осі координат:

$$w_{a\xi} = -w_r \sin\varphi + w_c \sin\varphi = \sin\varphi\ (2\omega \nu_r - \frac{\nu_r^2}{\rho});$$

$$w_{a\eta} = w_r \cos\varphi - w_e - w_c \cos\varphi = \cos\varphi (\frac{\nu_r^2}{\rho} - 2\omega \nu_r) - \omega^2 r.$$

Задача 33

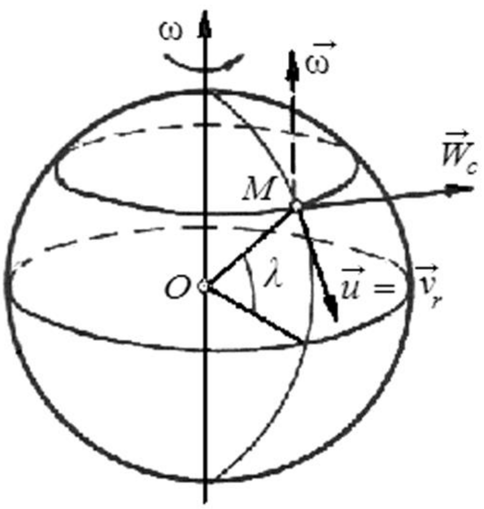


Рис. 3.14

Тіло рухається в північній кулі вздовж меридіана з півночі на південь поступально (рис. 3.14) зі швидкістю 90 км/год. Визначити величину і напрям прискорення Коріоліса, коли тіло перебуває на широті $\lambda = 60°$.

Розв'язання

Як відомо, поступальний рух тіла характеризується рухом будь-якої його точки. Отже, тіло будемо розглядати як точку. Відносна швидкість $\nu_r = u$, а вектор $\vec{v}_r$ утворює із земною віссю кут 60°. Кутова швидкість обертання Землі (рад/с)

$$\omega_e = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = \frac{6{,}28}{24 \cdot 3600} = 0{,}000073 = 73 \cdot 10^{-6},$$

за умовою $\nu_r = \frac{90000}{3600} = 25$ м/с. Отже, прискорення Коріоліса

$$w_c = 2\omega_e \nu_r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}\right) = 2\omega_e u \cdot \sin 60° =$$

$$= 2 \cdot 73 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}0031 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, найбільше коріолісове прискорення тіло буде мати на полюсі за кута $\varphi = 90°$. На екваторі прискорення Коріоліса за кута $\varphi = 0°$ дорівнює нулю (на екваторі вектор $\vec{\omega}_e$ паралельний вектору $\vec{u}$).

Напрям прискорення Коріоліса знайдемо за правилом векторного добутку (3.7).

Оскільки відомі напрямки $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, то вектор $\vec{w}_c$ напрямлено перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{v}_r = \vec{u}$, тобто перпендикулярно до площини меридіанного перерізу на схід, звідки видно поворот на найменший кут від вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора $\vec{v}_r$ проти годинникової стрілки.

Із формули (3.8) видно, що величина прискорення Коріоліса мала, оскільки кутова швидкість обертання Землі дуже мала, а саме:

$$\omega_e = 73 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с.}$$

Тому в разі руху тіл на земній поверхні, які відбуваються з невеликими швидкостями, прискоренням Коріоліса можна нехтувати.

Рекомендуємо самостійно розв'язати задачі зі збірника [4]: 23.11; 23.13; 23.18; 23.27-23.29; 23.43; 23.44; 23.47-23.49; 23.52; 23.56.

3.2. Питання для самоконтролю

1. Який рух точки називають складним?
2. Який рух точки називають відносним?
3. У чому полягає основна задача складного руху точки?
4. Як визначається абсолютна швидкість точки при складному русі?
5. Що представляє собою прискорення Коріоліса?
6. В яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
7. Як визначити напрям прискорення Коріоліса?
8. Як формулюється теорема про додавання швидкостей при складному русі?
9. Як формулюється теорема Коріоліса .
10. Чому при русі точки в напрямку до північного і південного полюсів Землі коріолісове прискорення буде направлене в різні боки?
11. Який рух точки називають переносним?
12. Який рух точки називають абсолютним?
13. Як визначається абсолютна швидкість точки при складному русі?
14. Як визначається переносна швидкість точки при складному русі?
15. Як визначається відносний рух точки при складному русі?
16. Як визначається переносний рух точки при складному русі?
17. Як визначається абсолютне прискорення точки при складному русі?
18. Як визначається віносне прискорення точки при складному русі?
19. Як визначається переносне прискорення точки при складному русі?
20. Чому дорівнює прискорення Коріоліса, якщо переносний рух є поступальним?
21. Чи впливає вид переносного руху на прискорення Коріоліса?

22. Які системи координат необхідно ввести при розв'язанні задачі на складний рух точки і чому?
23. Чи можна нерухому систему координат в задачі повязати з рухомим тілом?
24. Чи може бути в задачі із складного руху точки дві складові абсолютного прискорення точки? В якому випадку це можливо?
25. Як визначають в задачах із складного руху точки модуль абсолютного прискорення точки у випадку, коли складових три, чотири, п'ять?

3.3. Тестові запитання та завдання

3.1

Похідна за часом від вектора у рухомій системі координат називається …….. похідною.

3.2

Похідна за часом від вектора в нерухомій системі координат називається …….. похідною.

3.3

Абсолютна похідна характеризує зміну вектора в ……….. системі координат.

3.4

Відносна похідна характеризує зміну вектора в ……….. системі координат.

3.5

Зв'язок між абсолютною $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ і відносною $\frac{d'\vec{\rho}}{dt}$ похідними вектора має вигляд (формула Бура):

A. $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ B. $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt}$ C. $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$

3.6

Вектор $\vec{\Omega}$, що входить до формули $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{a}$, характеризує зміну положення:

A. вектора $\vec{a}$ відносно нерухомої системи координат
B. рухомої системи координату просторі
C. вектора $\vec{a}$ відносно рухомої системи координат

3.7

Вектор $\vec{\Omega}$, що характеризує швидкість зміни положення в просторі рухомої системи координат, під час всього руху дорівнює нулю, якщо рухома система координат рухається ……….. .

3.8

Проекція на вісь Ox вектора $\vec{\Omega}$, що характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат відносно нерухомої, має вигляд: $\Omega_x = \vec{k} \cdot ...$

A. $\frac{d\vec{i}}{dt}$ B. $\frac{d\vec{j}}{dt}$ C. $\frac{d\vec{k}}{dt}$ D. $\vec{j}$

3.9

Проекція на вісь Oy вектора $\vec{\Omega}$, що характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат відносно нерухомої, має вигляд: $\Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot ...$

A. $\vec{i}$ B. $\vec{j}$ C. $\vec{k}$ D. $\frac{d\vec{i}}{dt}$

3.10

Рух точки відносно нерухомої системи координат називається ………. .

3.11

Рух точки відносно рухомої системи координат називається ………. .

3.12

Рух рухомої системи координат відносно нерухомої називається ……….. .

3.13

Якщо x, y, z – координати точки в рухомій системі координат, то залежності $x = x(t),\ \ y = y(t),\ z = \ z(t)$ є рівняннями ……… руху точки.

3.14

Якщо ξ, η, ζ – координати точки в нерухомій системі координат, то залежності $\xi = \xi(t),\ \ \eta = \eta(t),\ \zeta = \ \zeta(t)$ є рівняннями ……… руху точки.

3.15

Якщо по стержню, що обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = \varphi(t)$, рухається точка M, то цей рух відносно стержня є:

A. абсолютним B. переносним C. відносним

3.16

Якщо по стержню, що обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = \varphi(t)$, рухається точка M, то цей рух відносно нерухомої системи координат є:

A. абсолютним B. переносним C. відносним

3.17

Якщо по стержню, що обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = \varphi(t)$, рухається точка M, то її рух разом із стержнем є:

A. абсолютним B. переносним C. відносним

3.18

Швидкість точки відносно нерухомої системи координат називається …………… .

3.19

Швидкість точки відносно рухомої системи координат називається …………… .

3.20

Швидкість тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент часу збігається рухома точка, що має відносний рух, називається ……… .

3.21

Вкажіть формулу, що зв'язує абсолютну, переносну швидкості точки.

A. $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ B. $\vec{v}_r = \vec{v}_e + \vec{v}_a$ C. $\vec{v}_a = \vec{v}_e - \vec{v}_r$

3.22

Вкажіть вираз для коріолісового прискорення:

A. $w_c = 2\vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r$ B.$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ C. $\vec{w}_c = 2\vec{v}_r \times \vec{\omega}_e$

3.23

Вкажіть формулу для визначення відносного прискорення точки:

A.$\vec{w}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}$ B. $\vec{w}_r = \frac{d'\vec{v}_r}{dt}$ C.$\vec{w}_r = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

3.24

Якщо вектори переносної кутової швидкості тіла $\vec{\omega}_e$ і відносної швидкості точки $\vec{v}_r$ паралельні, то коріолісове прискорення:

A. максимальне B. мінімальне C. дорівнює нулю

3.25

Вкажіть формулу для абсолютного прискорення точки у випадку її складного руху:

A. $\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r$ B. $\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + 2\vec{w}_c$ C. $\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c$

Розділ 4

Плоскопаралельний рух твердого тіла

4.1. Теоретична та практична частина

Плоскопаралельним рухом називають такий рух твердого тіла, за якого всі його точки рухаються паралельно деякій нерухомій площині. З визначення плоскопаралельного руху випливає те, що задачу вивчення плоскопаралельного руху тіла можна звести до вивчення руху проекції цього тіла на певну площину (рис. 4.1).

Отже, кінематика плоскопаралельного руху зводиться до кінематики відрізка прямої на площині.

Плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як складний, розкладаючи його на переносний поступальний рух разом із полюсом і на відносний обертальний рух навколо цього полюса.

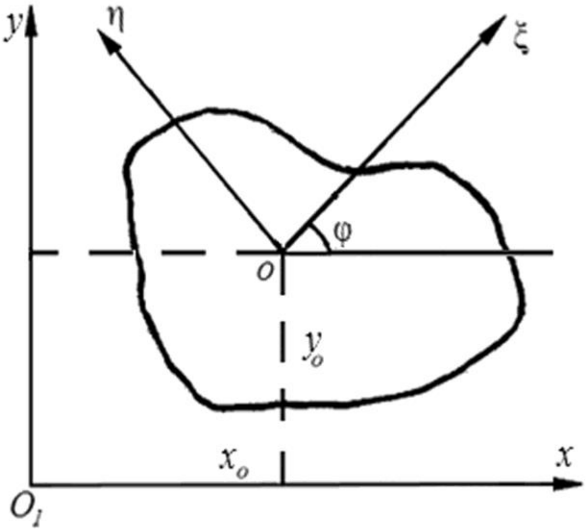


Рис. 4.1

Щоб дослідити плоскопаралельний рух твердого тіла, необхідно знати характеристики руху полюса і характеристики обертального руху твердого тіла навколо полюса. Полюс O характеризується швидкістю $\vec{v}_O$ і прискоренням $\vec{w}_O$.

Надалі за полюс будемо брати ту точку плоскої фігури, швидкість якої у певний момент часу відома.

Характеристиками обертального руху тіла навколо полюса є кут повороту φ, миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ і миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ є миттєвими, оскільки в кожний момент часу полюс займає нове положення.

Розглянемо методи визначення ω і ε, $\vec{v}$ і $\vec{w}$:

Перший метод. Якщо відоме рівняння обертального руху тіла навколо полюса O, тобто

$$\varphi = \varphi(t),$$

то миттєва кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

а миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Слід звернути увагу на те, що $\vec{\omega}$ за плоскопаралельного руху не залежить від вибору полюса.

Другий метод. Швидкості точок плоскої фігури можна визначити такими способами:

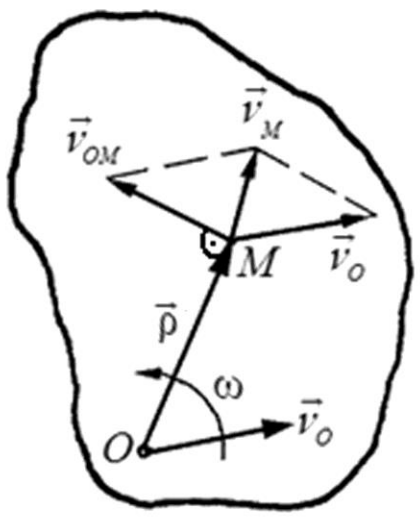


Рис. 4.2

1. *За допомогою плану швидкостей*. Якщо відома швидкість полюса $\vec{v}_O$ і миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ навколо полюса, то швидкість довільної точки M плоскої фігури (рис. 4.2) визначається за теоремою про розподіл швидкостей в твердому тілі за плоскопаралельного руху

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}, \tag{4.1}$$

де $\vec{v}_{OM}$ – відносна швидкість точки навколо полюса O, або швидкість точки M в її обертанні навколо полюса O.

За формулою Ейлера

$$\vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

За значенням

$$v_{OM} = \omega\rho,$$

оскільки кут між $\vec{\omega}$ і $\vec{\rho}$ дорівнює 90°.

Зауважимо, що для розв'язання задач за формулою (4.1) доцільно користуватися графічним методом визначення швидкостей точок за допомогою плану швидкостей, який дозволяє визначити швидкості будь-яких точок механізму та миттєві кутові швидкості обертання його ланок.

Запишемо проекції лівої і правої частин виразу (4.1) на напрям OM:

$$(\vec{v}_M)_{OM} = (\vec{v}_o)_{OM},$$

тобто проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що проходять через ці дві точки, рівні між собою.

2. *За допомогою миттєвого центра швидкостей* (*МЦШ*). Зазначимо, що миттєвим центром швидкостей називають точку плоскої фігури, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю.

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей P, швидкість довільної точки M плоскої фігури можна знайти, як швидкість точки M в її обертанні навколо точки P (рис. 4.3), тобто

$$v_M = MP\omega. \tag{4.2}$$

Розглянемо способи знаходження положення МЦШ тіла:

а) положення миттєвого центра швидкостей можна визначити, якщо відома швидкість однієї точки, наприклад O, та миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ навколо точки O. Миттєвий центр швидкостей міститься на перпендикулярі до швидкості $\vec{v}_O$ (рис. 4.4) на відстані

$$\frac{v_O}{\omega} = OP;$$

б) якщо відомі швидкості двох точок плоскої фігури, наприклад, $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ (рис. 4.5), то миттєвий центр швидкостей P розміщено в точці перетину перпендикулярів, які проведені до швидкостей зазначених точок через самі точки.

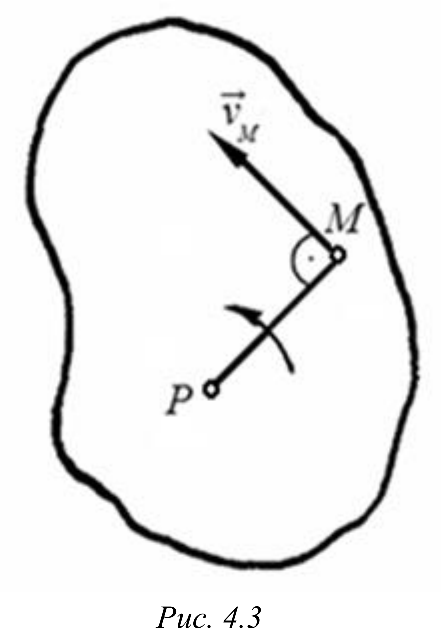


Рис. 4.3

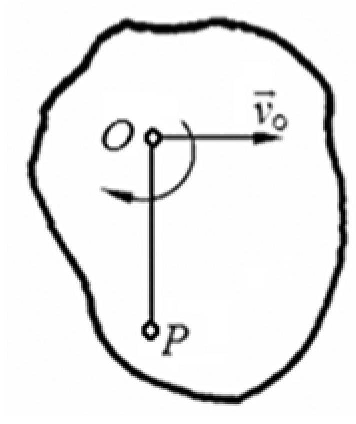


Рис. 4.4

У цьому разі справедлива пропорція

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \tag{4.3}$$

Цю залежність найбільше використовують для визначення швидкостей точок за плоскопаралельного руху тіла.

Нагадаймо окремі випадки визначення миттєвого центра швидкостей:

1. Швидкості двох точок тіла паралельні, нерівні між собою, напрямлені в один бік і перпендикулярні до прямої, що проходить через ці точки (рис. 4.6). Миттєвий центр швидкостей розміщено в точці перетину перпендикуляра з прямою, що проходить через кінці векторів швидкостей.

2. Швидкості двох точок тіла паралельні, напрямлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що сполучає ці точки (рис. 4.7). Миттєвий центр швидкостей розміщено в точці перетину прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей із зазначеним перпендикуляром.

3. Швидкості двох точок тіла паралельні, рівні й напрямлені в один бік (рис. 4.8). Миттєвий центр швидкостей віддаляється в нескінченність й у цьому випадку відбувається миттєво-поступальний рух.

Плоскопаралельний рух тіла можна дослідити аналітичним способом. Позначимо через xO_1y – осі координат, і в площині xO_1y розглянемо рух плоскої фігури з полюсом O (рис. 4.9).

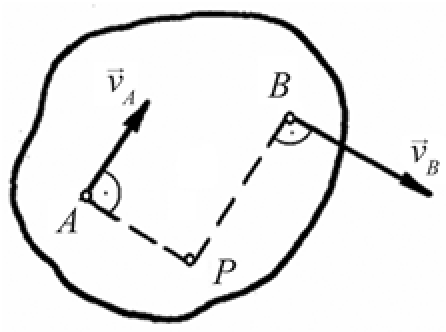


Рис. 4.5

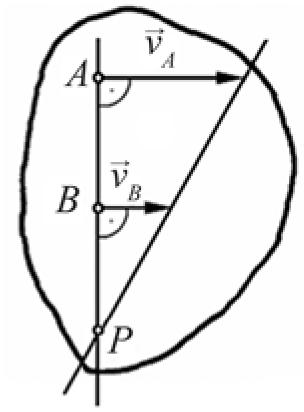


Рис. 4.6

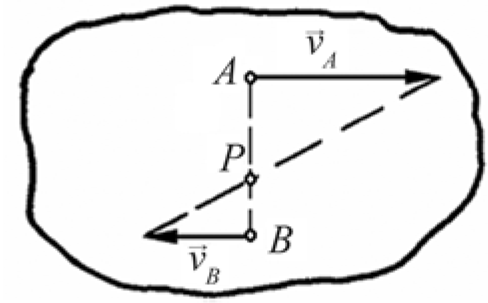


Рис. 4.7

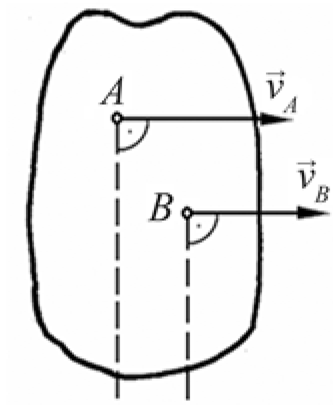


Рис. 4.8

Рівняння руху плоскої фігури мають вигляд:

$$x_O = x_O(t);$$
$$y_O = y_O(t);$$
$$\varphi = \varphi_O(t),$$

де x_O, y_O – координати полюса; φ – кут повороту навколо полюса.

Координати довільної точки M фігури будуть:

$$x_M = x_O + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi;$$
$$y_M = y_O + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \qquad (4.4)$$

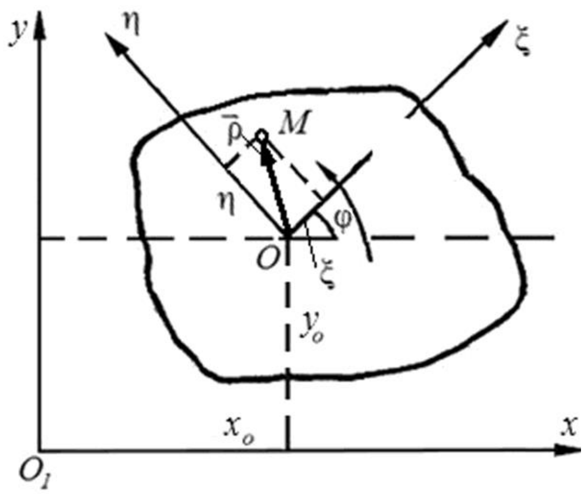


Рис. 4.9

де ξ, η – координати точки M у рухомій системі координат, незмінно пов'язаній із рухомою фігурою; ξ і η не змінюються в часі, як відстані між двома точками абсолютно твердого тіла.

У параметричній формі рівняння (4.4) визначають рівняння траєкторії довільної точки плоскої фігури.

Швидкість і прискорення в цьому разі визначають за їх проекціями:

$$v_x = \dot{x}_M; \qquad v_y = \dot{y}_M;$$
$$w_x = \ddot{x}_M; \qquad w_y = \ddot{y}_M.$$

Положення миттєвого центра швидкостей P визначають за формулами:

$$x_P = x_O - \frac{\dot{y}_O}{\dot{\varphi}};$$

$$y_P = y_O + \frac{x_O}{\dot{\varphi}}. \qquad (4.5)$$

Якщо плоска фігура обертається навколо полюса за годинниковою стрілкою, то $\omega = \dot{\varphi}$ – від'ємна, у протилежному випадку – додатна.

Формули (4.5) у параметричній формі визначають рівняння нерухомої центроїди.

Рівняння рухомої центроїди мають вигляд:

$$\xi_P = \frac{\dot{x}_O\sin\varphi - \dot{y}_O\cos\varphi}{\dot{\varphi}};$$

$$\eta_P = \frac{\dot{x}_O\cos\varphi - \dot{y}_O\sin\varphi}{\dot{\varphi}}.$$

Для визначення прискорень точок тіла під час плоскопаралельного руху можна використати такі способи:

1. Коли відоме прискорення полюса точки (O) $\vec{w}_O$, миттєві кутові швидкість $\vec{\omega}$ і прискорення $\vec{\varepsilon}$ і тіла, то прискорення довільної точки M дорівнює:

$$\vec{w}_{\text{M}} = \vec{w}_O + \vec{w}_{O\text{M}},$$

або

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{OM}^{(\text{об})} + \vec{w}_{OM}^{(\text{доц})}, \tag{4.6}$$

де $\vec{w}_{OM}$ – повне обертальне прискорення точки M навколо полюса O.

У свою чергу,

$$\vec{w}_{OM} = \vec{w}_{OM}^{(\text{об})} + \vec{w}_{OM}^{(\text{доц})}, \tag{4.7}$$

де

$$\vec{w}_{OM}^{(\text{об})} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho};$$

$$\vec{w}_{OM}^{(\text{доц})} = -\omega^2\vec{\rho},\ \vec{\rho} = \overrightarrow{OM}.$$

За формулою (4.6) можна геометрично визначити прискорення точок тіла, побудувавши план прискорень, а також виконати аналітичне розв'язання задачі.

Модулі цих векторів:

$$w_{OM}^{(\text{об})} = \varepsilon\rho;$$

$$w_{OM}^{(\text{доц})} = \omega^2\rho.$$

Вектор $\vec{w}_{OM}$ з доцентровим прискоренням утворює кут α (рис. 4.10):

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

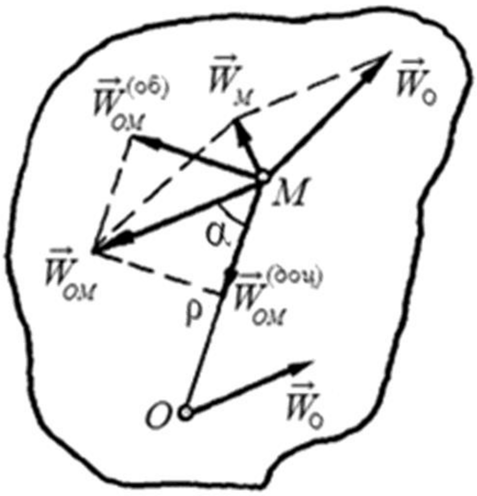


Рис. 4.10

2. Прискорення точок тіла за плоского руху можна також визначити за теоремою Коріоліса, але розв'язання задач потребує більшої затрати часу, оскільки виникає потреба визначати кутову швидкість і кутове прискорення відносного руху.

3. Коли за полюс обрати миттєвий центр прискорень Q, тобто таку точку, прискорення якої у певний момент часу дорівнює нулю $w_Q = 0$, то прискорення двох точок, наприклад A і B, плоскої фігури задовольняють пропорції

$$\frac{w_A}{w_B} = \frac{AQ}{BQ}. \tag{4.8}$$

Положення миттєвого центра прискорень визначають за формулами:

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{4.9}$$

Якщо $\varepsilon > 0$, то α відкладають від вектора прискорення $\vec{w}_o$ у бік обертання плоскої фігури (рис. 4.11), якщо $\varepsilon < 0$ – у бік, протилежний обертанню фігури.

Коли відоме положення миттєвого центра швидкостей, миттєву кутову швидкість ω визначають діленням значення відомої швидкості будь-якої точки, наприклад *A*, на відстань від цієї точки до миттєвого центра швидкостей (рис. 4.12), тобто

$$\omega = \frac{v_A}{AP}. \tag{4.10}$$

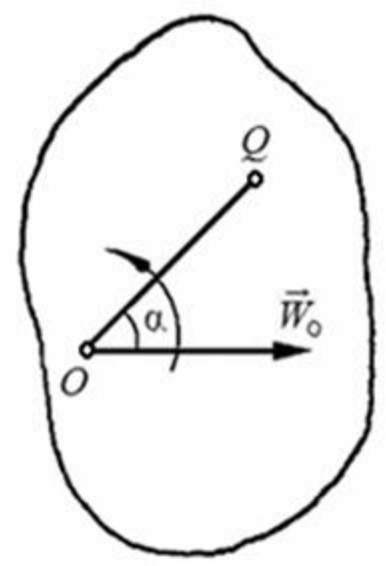


Рис. 4.11

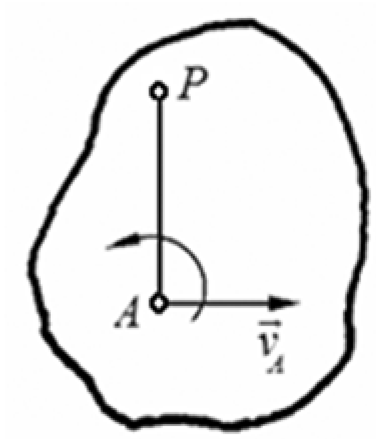


Рис. 4.12

Тут треба врахувати знак ω. Коли тіло обертається навколо миттєвого центра швидкостей за годинниковою стрілкою, то ω має знак «мінус», інакше ω має знак «плюс».

Якщо AP = const, миттєве кутове прискорення ε визначають таким чином:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP}\frac{dv_A}{dt} = \frac{w_{A\tau}}{AP}. \tag{4.11}$$

Якщо $AP \neq$ const, то МЦШ визначають за вказаними правилами в кожний момент часу.

Під час розв'язування задач з плоскопаралельного руху тіла можуть траплятися такі типи задач:

1) за заданої швидкості і прискорення точки визначити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення тіла;

2) за заданими миттєвою кутовою швидкістю і положенням миттєвого центра швидкостей визначити швидкість будь-якої точки тіла;

3) за заданими швидкістю в одній точці тіла і напрямком швидкості в будь-якій іншій точці визначити швидкості точок тіла та побудувати план швидкостей;

4) за заданими прискоренням точки $\vec{w}_O$, миттєвими ω і ε визначити прискорення довільної точки *M* твердого тіла;

5) за заданими швидкістю і прискоренням однієї точки плоскої фігури і

напрямком швидкості і прискоренням другої точки визначити прискорення точок фігури;

6) за заданими швидкістю і прискоренням точки плоскої фігури визначити положення миттєвого центра прискорень і прискорення довільної точки плоскої фігури;

7) за заданими швидкостями двох точок тіла скласти рівняння центроїд.

Рекомендуємо розв'язувати задачі в такій послідовності:

1) вибрати за полюс точку плоскої фігури, швидкість та прискорення якої відомі або легко визначаються з умови задачі;

2) знайти другу точку плоскої фігури, напрямок швидкості якої відомий з умови задачі;

3) визначити положення миттєвого центра швидкостей та миттєву кутову швидкість;

4) користуючись формулами (4.2) або (4.3), визначити швидкості точок тіла;

5) знайти миттєве кутове прискорення;

6) визначити обертальне та доцентрове прискорення і зобразити ці вектори на рисунку;

7) обчислити модуль повного прискорення точки за формулою (4.7) геометрично за правилом додавання векторів або аналітично за проекціями прискорень на осі координат.

Зауважимо, що абсолютне прискорення точки тіла за плоскопаралельного руху можна визначити і за теоремою Коріоліса, що буде показано у процесі розв'язання задач.

Задача 34

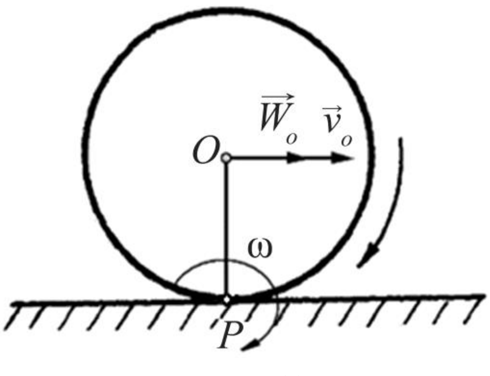


Рис. 4.13

Визначити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення колеса, яке котиться по прямолінійній рейці без ковзання, якщо швидкість його центра $v_o = 2$ м/с, прискорення $w_o = 6$ м/с^2. Радіус колеса $r = 0{,}5$ м (рис. 4.13).

Розв'язання

Оскільки колесо котиться без ковзання по прямолінійній рейці, то в точці дотику колеса з рейкою швидкість точки колеса дорівнює нулю. Отже, в цій точці міститься миттєвий центр швидкостей (точка P). Миттєва кутова швидкість колеса за формулою (4.10)

$$\omega = \frac{v_o}{OP} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ рад/с}.$$

Миттєве кутове прискорення визначимо за формулою (4.11). Оскільки OP = const, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{OP}\frac{dv_o}{dt} = \frac{w_{o\tau}}{OP} = \frac{w_o}{OP} = \frac{6}{0{,}5} = 12 \text{ рад/с.}$$

Задача 35

Колесо радіуса R =0,5м котиться без ковзання по похилій прямолінійній поверхні (рис. 4.14). Визначити швидкості точок M_1, M_2, M_3, M_4 колеса, якщо у розглянутий момент часу його миттєва кутова швидкість $\omega = 2$ рад/с.

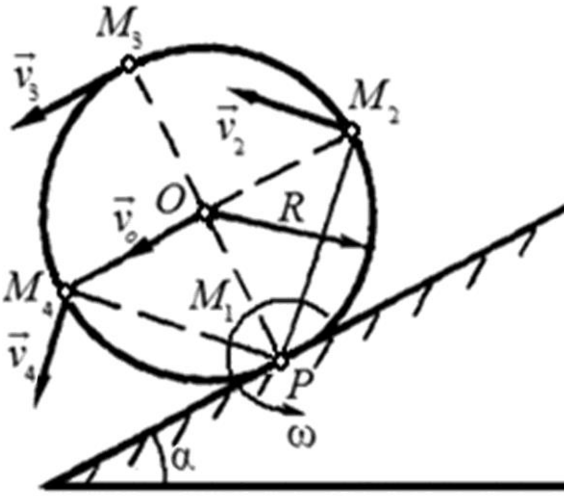


Рис. 4.14

Розв'язання

Оскільки колесо котиться без ковзання, то в точці дотику його з поверхнею розміщено миттєвий центр швидкостей (точка P). Отже, швидкість будь-якої точки колеса визначимо як у випадку обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей.

Маємо: $v_1 = 0$, оскільки точка M_1 збігається з точкою P;

$$v_2 = \omega\, PM_2 = \omega\, R\sqrt{2} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ м/с;}$$
$$v_3 = \omega\, 2R = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ м/с;}$$
$$v_4 = \omega\, R\sqrt{2} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Швидкості точок спрямовані в напрямку руху і перпендикулярні до миттєвих радіусів обертання.

Задача 36

Вершини A і B плоского трикутника ABC рухаються по колах за допомогою кривошипів AD і BE (рис. 4.15). Визначити швидкість точки C та її напрям, якщо відома кутова швидкість ω кривошипа AD, а також миттєву кутову швидкість ω трикутника ABC.

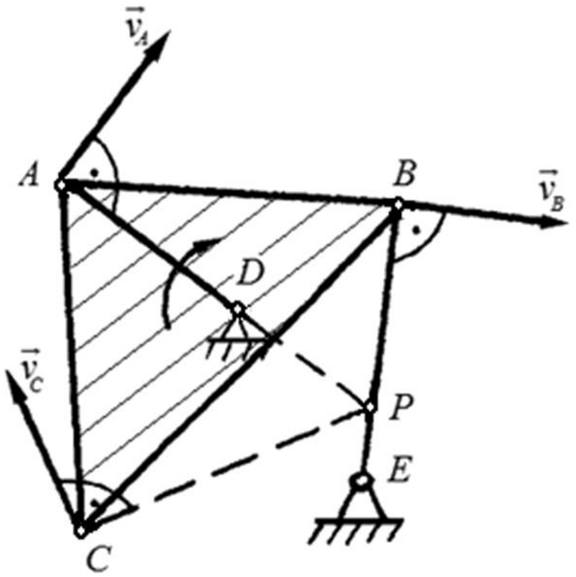


Рис. 4.15

Розв'язання

Рух трикутника ABC є плоскопаралельним. Скористаємось другим методом знаходження положення миттєвого центра швидкостей. Виходячи з умови задачі, визначимо лінійну швидкість тіла в точці A, оскільки точка A є спільною для ABC і кривошипа AD, що обертається із заданою кутовою швидкістю ω:

$$v_A = \omega AD.$$

Швидкість $\vec{v}_A$ напрямлена перпендикулярно до AD.

У точці B вектор швидкості $\vec{v}_B$ перпендикулярний до BE. Знайдемо миттєвий центр швидкостей (точку P). Оскільки для точки C миттєвий радіус обертання CP, то за формулою (4.3) маємо:

$$v_c = \frac{v_A CP}{AP} = \frac{\omega ADCP}{AP}.$$

Швидкість $\vec{v}_c$ перпендикулярна до CP.

Миттєва кутова швидкість тіла ABC

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega AD}{AP}.$$

Задача 37

Побудувати план швидкостей механізму, зображеного на рис. 4.16, *а*, якщо кривошип O_1A обертається з кутовою швидкістю ω = 2 рад/с; O_1A = 30см, AB = 120 см, CD = 50 см, CE = 40 см, DE = 30 см, O_2E = 40 см. Шарнір розміщено в середині AB. Визначити миттєві кутові швидкості ланок AB і CE.

Розв'язання

Скористаємость графічним методом визначення швидкостей точок механізму, побудувавши план швидкостей. Визначимо швидкість точки A, яка належить кривошипу OA, виходячи з умови задачі:

$$v_A = \omega OA = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с},$$

де вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярний до OA.

Побудову плану швидкостей почнемо з ланки AB (шатуна), оскільки в точці A відома швидкість за величиною і напрямком, а в точці B відомий напрям швидкості $\vec{v}_B$, оскільки точка B є спільною для шатуна і повзуна B. Відкладемо від довільної точки P (рис. 4.16, *б*) у вибраному масштабі вектор $\overrightarrow{Pa} = \vec{v}_A$. Проведемо лінію Pb паралельно вектору $\vec{v}_B$.

За формулою (4.1) має бути

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB},$$

де $\vec{v}_{AB} \perp AB$. Отже, якщо через точку a провести пряму $ab \perp AB$ до її перетину з лінією Pb, то вектор $\overrightarrow{Pb}$ визначить (у тому ж масштабі) швидкість $\vec{v}_B$, а вектор $\overrightarrow{ab}$ буде дорівнювати $\vec{v}_{AB}$.

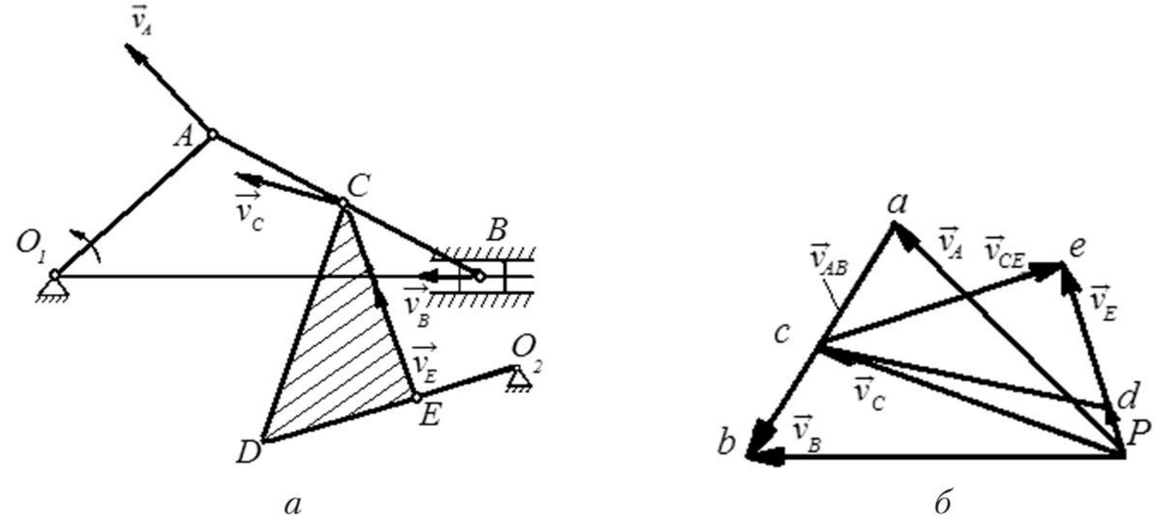


Рис. 4.16

Поділивши відрізок ab навпіл (оскільки $AC = CB$) і з'єднавши його з точкою P, отримаємо $\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{P_C}$.

За відомою швидкістю $\vec{v}_C$ і напрямком швидкості точки E ($\vec{v}_E \perp O_2E$) побудуємо план швидкостей ланки CDE. Проводячи лінію $Pe \perp O_2E$ і лінію $ce \perp CE$, знайдемо вектор $\overrightarrow{Pe} = \vec{v}_E$.

Щоб знайти швидкість $\vec{v}_D$ точки D, проведемо лінію $cd \perp CD$ і $ed \perp DE$. Знайдемо $\overrightarrow{Pd} = \vec{v}_D$.

Миттєві кутові швидкості ланок AB і CDE визначимо з рівностей:

$$\omega_{AB} = \frac{\mathrm{ab}}{AB} = \frac{50}{120} = 0{,}41 \text{ рад/с}, \quad \omega_{CDE} = \frac{ce}{CE} = \frac{40}{40} = 1 \text{ рад/с}.$$

Задача 38

Шестірня радіуса r приводиться в рух кривошипом OA, який обертається навколо осі O нерухомої шестірні радіуса $R = 3r$ (см) (рис. 4.17). Кривошип обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon_0 = 4$ рад/с^2, маючи в заданий момент кутову швидкість $\omega_0 = 2$ рад/с. Визначити прискорення точки P рухомої шестірні.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу різними способами.

1. *Використаємо формулу* (4.6). Аналізуючи рухи кожної деталі механізму, робимо висновок, що кривошип OA здійснює обертальний рух навколо осі O, а шестірня II – плоскопаралельний рух.

Виходячи з умови задачі, за полюс виберемо точку A, оскільки швидкість і прискорення її можна визначити.

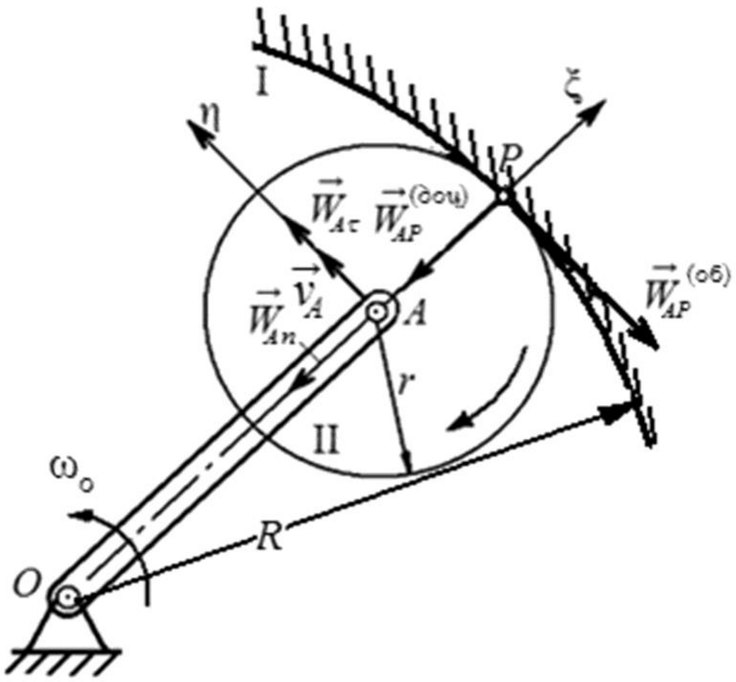


Рис. 4.17

На основі формули (4.6) маємо:

$$\vec{w}_P = \vec{w}_A + \vec{w}_{AP}^{(об)} + \vec{w}_{AP}^{(доц)}.$$

Прискорення полюса $\vec{w}_A = \vec{w}_{A\tau} + \vec{w}_{An}$,

де $w_{A\tau} = \varepsilon_0 OA = 2r\varepsilon_0 = 2r \cdot 4 = 8r$,

$w_{An} = \omega_0^2 OA = 2r\omega_0^2 = 8r$.

Вектор $\vec{w}_{A\tau}$ напрямлено перпендикулярно до радіуса OA, а $\vec{w}_{An}$ – уздовж радіуса OA до осі O.

Щоб обчислити обертальне і доцентрове прискорення, визначимо миттєву кутову швидкість ω і миттєве кутове прискорення ε. Оскільки рухома шестірня котиться по нерухомій без ковзання, то в точці P їх дотику розміщено миттєвий центр швидкостей. Отже, за формулою (4.10) її миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_0 OA}{AP} = \frac{\omega_0 2r}{r} = 2\omega_0 = 4 \text{ рад/с}.$$

Оскільки $\vec{v}_A \perp AP$ і напрямлена в бік руху, то доходимо висновку, що шестірня II обертається за годинниковою стрілкою.

Її миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{AP}\right) = \frac{1}{AP} \cdot \frac{dv_A}{dt} = \frac{w_{A\tau}}{AP} = \frac{8r}{r} = 8 \text{ рад/с}^2.$$

Доцентрове прискорення точки P

$$w_{AP}^{(доц)} = \omega^2 AP = 4^2 r = 16r.$$

Доцентрове прискорення напрямлено вздовж радіуса *AP* до полюса *A*.

Обертальне прискорення (см/с^2) точки *P*

$$w_{\text{AP}}^{(\text{об})} = \varepsilon AP = 8r.$$

Вектор $\vec{w}_{AP}^{(\text{об})}$ напрямлено перпендикулярно до радіуса *AP* у напрямку обертання шестірні II.

Додаючи геометрично вектори $\vec{w}_{An}$, $\vec{w}_{A\tau}$, $\vec{w}_{AP}^{(\text{доц})}$, $\vec{w}_{AP}^{(\text{об})}$ (рис. 4.18), отримаємо прискорення точки *P* ($\vec{w}_P$), модуль якого $w_p = pd$,

$$w_p = w_{An} + w_{Ap}^{(\text{доц})} = 8r + 16r = 24r.$$

Вектор $\vec{w}_p$ напрямлено від точки *P* до осі *O*.

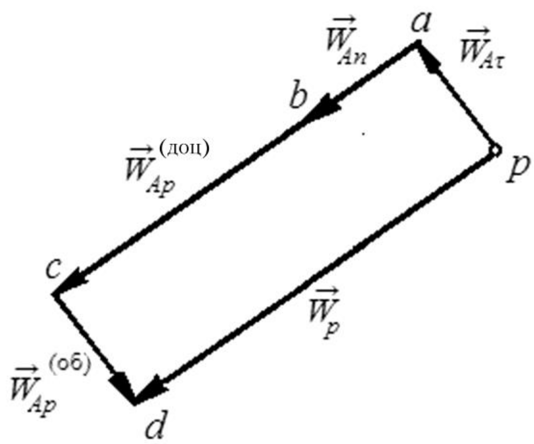


Рис. 4.18

2. *Прискорення точки P* можна визначити також, користуючись теоремою Коріоліса. Дійсно, за умовою задачі робимо висновок, що рух точки *P* є складним. Зв'яжемо рухомі осі координат із шестірнею II. Тоді переносним рухом точки *P* буде поступальний рух початку рухомої системи координат (точка *A*). Відносним рухом точки *P* буде рух по колу з центром *A*.

За теоремою Коріоліса маємо:

$$\vec{w}_{\text{ap}} = \vec{w}_{ep} + \vec{w}_{rp} + \vec{w}_{cp}.$$

Переносне прискорення точки *P* дорівнює прискоренню будь-якої точки тіла за поступального його руху, наприклад, точки *A*. Отже, $\vec{w}_{ep} = \vec{w}_A$.

Оскільки точка *A* одночасно належить і кривошипу *OA*, який обертається навколо осі *O*, то

$$\vec{w}_A = \vec{w}_{A\tau} + \vec{w}_{An},\ w_{e\tau} = w_{A\tau};\ w_{en} = w_{An},$$

де $w_{A\tau} = \varepsilon_0 OA = 4 \cdot 2r = 8r$, $w_{An} = \omega_0^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 2r = 8r$.

Вектор $\vec{w}_{An}$ напрямлено вздовж радіуса до осі обертання, а вектор $\vec{w}_{A\tau}$ – перпендикулярно до радіуса в напрямку обертання кривошипа *OA*.

Отже, $w_e = w_A = \sqrt{w_{A\tau}^2 + w_{An}^2} = 8r\sqrt{2}$;

$tg\alpha_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{\omega_0^2} = \dfrac{4}{4} = 1$, отже, $\alpha_1 = 45°$.

Відносне прискорення точки *P*

$$\vec{w}_{rp} = \vec{w}_{r\tau p} + \vec{w}_{rnp},$$

де $w_{r\tau p} = \varepsilon_r PA$; $w_{rnp} = \omega_r^2 PA$; ω_r – відносна кутова швидкість обертання; ε_r – відносне кутове прискорення.

Щоб обчислити ω_r, знайдемо відносну швидкість точки *P*. Оскільки точка

P перебуває в складному русі, то її абсолютна швидкість $\vec{v}_{ap} = \vec{v}_{ep} + \vec{v}_{rp} = 0$, оскільки шестірня рухається без ковзання.

Отже, маємо:

$$\vec{v}_{ep} = -\vec{v}_{rp}.$$

За модулем $v_{ep} = v_{rp}$.

Оскільки переносний рух тіла поступальний, то

$$v_{ep} = v_A = \omega_0 2r = 4r.$$

Відносна швидкість точки

$$v_r = \omega_r r.$$

З рівності v_e і v_r отримаємо:

$$\omega_r = 2\omega_0 = 4 \text{ рад/с};$$
$$\vec{\omega}_r = -2\vec{\omega}_0,$$

тобто вектор $\vec{\omega}_r$ має напрям, протилежний вектору $\vec{\omega}_0$.

Відносне кутове прискорення шестірні II

$$\varepsilon_r = \frac{d\omega_r}{dt} = 2\frac{d\omega_0}{dt} = 2\varepsilon_0 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ рад/с}^2,$$

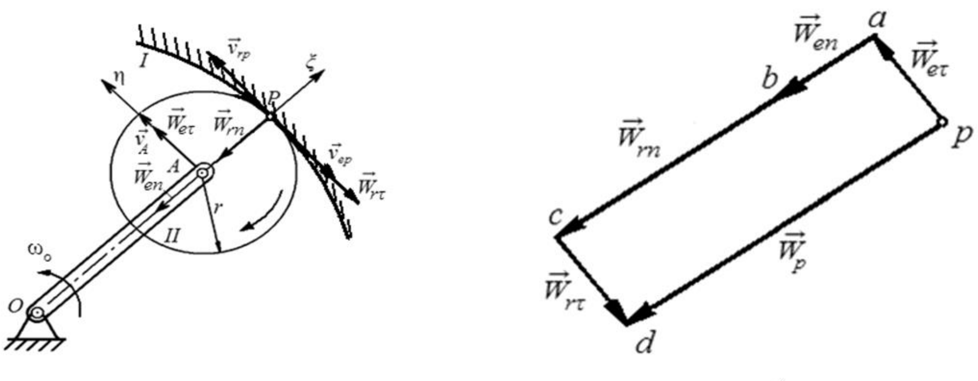
напрям $\vec{\varepsilon}_r$ збігається з напрямом $\vec{\omega}_r$.

Підставляючи значення ω_r і ε_r у формули прискорення (см/с^2), отримаємо:

$$w_{r\tau} = 8r;$$
$$w_{rn} = 4^2 r = 16r.$$

Вектор $\vec{w}_{rn}$ напрямлено вздовж радіуса *AP* до осі *A*, а $\vec{w}_{r\tau}$ – перпендикулярно до *AP* у бік обертання шестірні II. Прискорення Коріоліса $w_c = 0$, оскільки переносний рух є поступальним.

Додаючи вектори $\vec{w}_e$, $\vec{w}_{r\tau}$, $\vec{w}_{rn}$ (рис. 4.19, *а* і *б*), отримаємо $\vec{w}_p$, модуль якого $w_p = 24\, r\text{см/с}^2$.



а *б*

Рис. 4.19

3. *Розглянемо третій спосіб визначення прискорення точки* P, зокрема за допомогою миттєвого центра прискорень. Визначимо прискорення точки *P* за формулою (4.8):

$$\frac{w_P}{PQ} = \frac{w_A}{AQ}.$$

Для цього знайдемо положення миттєвого центра прискорень, користуючись формулами (4.9).

Маємо: $AQ = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} = \dfrac{\sqrt{w_{A\tau}^2+w_{An}^2}}{\sqrt{8^2+4^4}} = \dfrac{\sqrt{4r^2\varepsilon_o^2+4r^2\omega_o^4}}{\sqrt{64+64\cdot 4}} = \dfrac{r\sqrt{64+64}}{8\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{8r\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} = \dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$;

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 26°36'.$$

Проведемо від вектора $\vec{w}_A$ під кутом $\alpha = 26°36'$ у напрямку обертання шестірні II пряму, на якій відкладемо відрізок AQ (рис. 4.20). Таким чином, знайдемо миттєвий центр прискорень (точка Q). З'єднаємо прямою точки Q і P. Під кутом α до прямої PQ у зворотному напрямку відкладемо вектор прискорення $\vec{w}_P$, модуль якого обчислимо за формулою (4.8):

$$w_P = \frac{w_A PQ}{AQ} = \frac{8r\sqrt{2}\frac{3r}{\sqrt{5}}}{r\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = 24r \text{ см/с}^2,$$

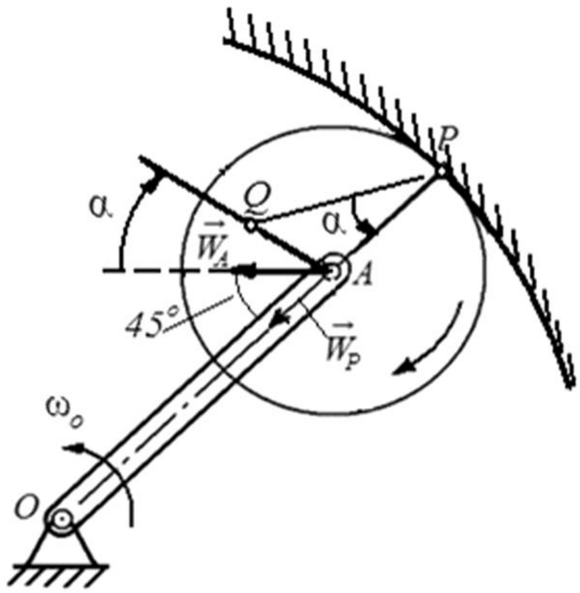


Рис. 4.20

де $PQ = \dfrac{3r}{\sqrt{5}}$.

Дійсно, з трикутника AQP (рис. 4.21) знайдемо:

$$PQ = x_1 + x_2 = a\ \mathrm{ctg}\alpha + a\ \mathrm{tg}45° = a\cdot 2 + a\cdot 1 = 3a =$$
$$= 3\,AQ\cos 45° = \frac{3\,r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3r}{\sqrt{5}} \text{ см.}$$

Порівнюючи три способи визначення прискорення точки P, доходимо висновку, що найпростішим є перший; другий потребує визначення відносних кутової швидкості та кутового прискорення і є більш складним.

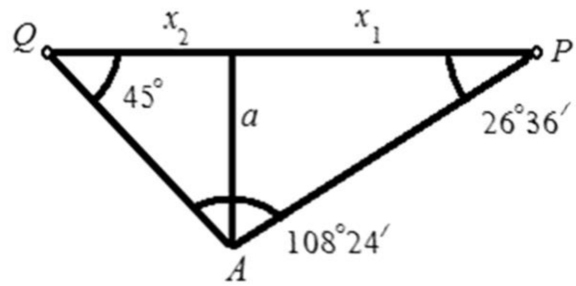


Рис. 4.21

Третій спосіб потребує геометричного визначення миттєвого центра прискорень. Для графічного визначення прискорень третій спосіб найефективніший.

Задача 39

Визначити прискорення точок *A* і *B* колеса, яке котиться без ковзання по похилій прямолінійній поверхні (рис. 4.22, *a*), якщо радіус колеса $r = 0{,}5$ м, швидкість його точки *O* в заданий момент часу $v_o = 1$ м/с, прискорення $w_O = 2$ м/с^2. Визначити також положення миттєвого центра прискорень *Q*.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі рух колеса плоскопаралельний.

У точці дотику колеса з поверхнею розміщено миттєвий центр швидкостей.

Миттєва кутова швидкість колеса

$$\omega = \frac{v_o}{OP} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ рад/с}.$$

Миттєве кутове прискорення колеса

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_o}{OP}\right) = \frac{1}{OP}\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{OP}w_{o\tau} = \frac{w_o}{OP} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Положення миттєвого центра прискорень визначаємо за формулами (4.9):

$$OQ = \frac{w_o}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{\sqrt{4^2 + 2^4}} = \frac{2}{\sqrt{32}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}25\sqrt{2} = 0{,}3525 \text{ м},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{4}{4} = 1,\ \alpha = 45°.$$

Відкладемо кут α від прискорення $\vec{w}_o$ у напрямку обертання колеса.

На основі формули (4.8) обчислимо прискорення точки *A*:

$$w_A = w_o\frac{AQ}{OQ} = w_o = 2 \text{ м/с}^2,$$

оскільки $AQ = OQ$, як видно з рис. 4.22, *a*.

Напрям $\vec{w}_A$ визначємо за кутом α, який утворює прискорення $\vec{w}_A$ з *QA*.

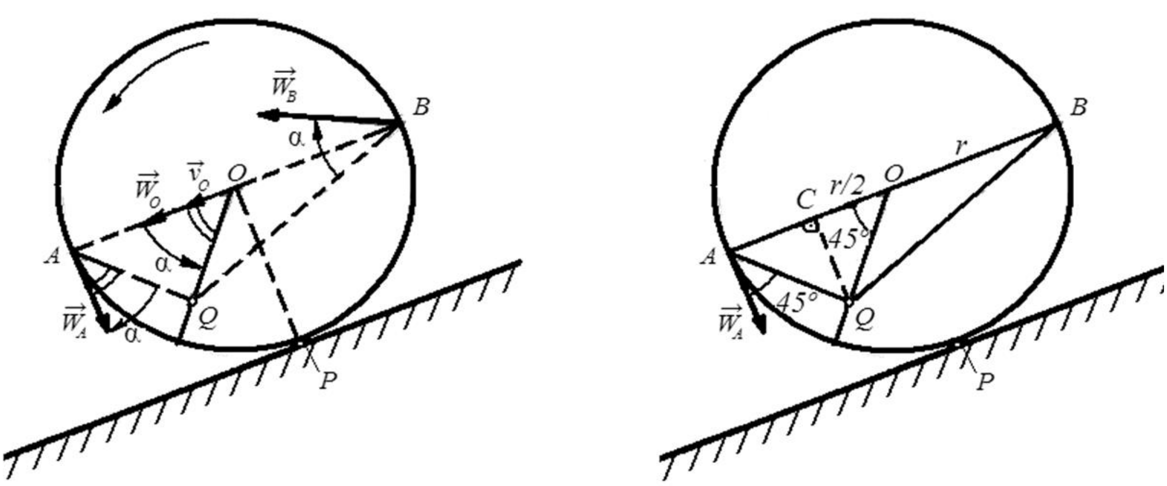
Аналогічно знайдемо

$$w_B = w_O\frac{BQ}{OQ} = \frac{2\cdot 0{,}7906}{0{,}3525} = 4{,}485 \text{ м/с}^2,$$

де *BQ* визначимо з прямокутного трикутника *QBA* (рис. 4.22, *б*):

$$BQ = \sqrt{QC^2 + CB^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10} =$$

$$= \frac{0{,}5}{2}\sqrt{10} = 0{,}7906 \text{ м}.$$



а *б*

Рис. 4.22

Задача 40

Кривошипно-шатунний механізм (рис. 4.23) складається з кривошипа $OA = r$, що обертається навколо нерухомої осі O, шатуна $AB = \ell$ і повзуна B. Скласти рівняння нерухомої і рухомої центроїд шатуна AB у параметричній формі, якщо кривошип OA обертається навколо осі O зі сталою кутовою швидкістю ω_0.

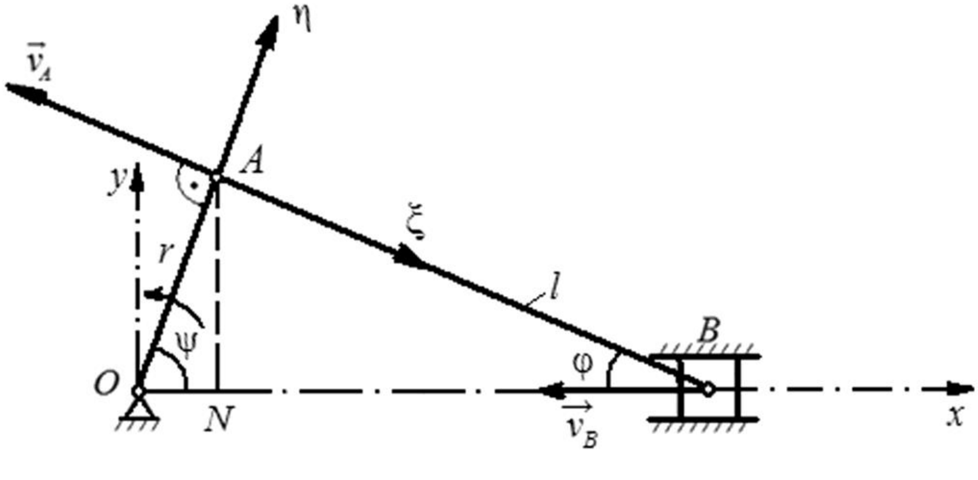


Рис. 4.23

Розв'язання

Вибираємо нерухому систему координат xOy з початком у точці O і рухому систему $\xi A\eta$ з початком у точці A. Вісь $A\xi$ напрямимо вздовж шатуна AB.

Визначимо координати точки A:

$$x_A = r\cos\psi = r\cos\omega_o t;$$
$$y_A = r\sin\psi = r\sin\omega_o t.$$

Проекції швидкості точки *A* на нерухомі осі координат:

$$\dot{x}_A = -r\omega_0 \sin\omega_0 t;$$
$$\dot{y}_A = r\omega_0 \cos\omega_0 t.$$

Для знаходження миттєвої кутової швидкості виразимо ординату точки *A* через кут повороту шатуна φ (кут φ беремо зі знаком мінус, оскільки він відраховується від осі *Ox* за рухом годинникової стрілки).

Маємо:

$$y_A = r\sin\omega_0 t = -\ell \sin\varphi.$$

Обчислюючи від обох частин похідні за часом, отримаємо:

$$r\omega_0 \cos\omega_0 t = -\ell \cos\varphi\dot{\varphi},$$

звідки

$$\dot{\varphi} = -\frac{r}{\ell}\omega_0 \frac{\cos\omega_0 t}{\cos\varphi} = -\frac{r\omega_0 \cos\omega_0 t}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}},$$

де

$$\cos\varphi = \frac{NB}{AB} = \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}{\ell}.$$

На основі формул (4.5) знайдемо рівняння нерухомої центроїди в параметричній формі:

$$x_p = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}} = r\cos\omega_0 t + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t},$$
$$y_p = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} = r\sin\omega_0 t + \mathrm{tg}\omega_0 t\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}.$$

Складемо рівняння рухомої центроїди в параметричній формі:

$$\xi_p = \frac{-r\omega_0 \sin\omega_0 t(-\frac{r}{\ell}\sin\omega_0 t) - r\omega_0 \cos\omega_0 t\frac{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}{\ell}}{-r\omega_0 \cos\omega_0 t}\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t};$$

$$\eta_p = \frac{-r\omega_0 \sin\omega_0 t \cdot \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}{\ell} - r\omega_0 \cos\omega_0 t\frac{r}{\ell}\sin\omega_0 t}{-r\omega_0 \cos\omega_0 t}\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t},$$

або після спрощень,

$$\xi_p = \ell - \frac{r}{\ell}\sin^2\omega_0 t(r + \frac{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}}{\cos\omega_0 t}),$$
$$\eta_p = \mathrm{tg}\omega_0 t(\ell - \frac{r^2}{\ell}\sin^2\omega_0 t) + \frac{r}{\ell}\sin\omega_0 t\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega_0 t}.$$

Рекомендуємо самостійно розв'язати такі задачі зі збірника задач [4]: 15.1–15.7; 15.9; 16.9–16.11; 16.14–16.16; 16.20; 16.21; 16.24; 16.30; 16.34; 16.35; 16.37; 16.41; 18.11; 18.22; 18.23; 18.25; 18.26; 18.28; 18.29; 18.37; 18.38.

4.2. Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називається плоскопаралельним ?
2. Яким чином вивчення плоскопаралельного руху твердого тіла у тривимірному просторі зводиться до вивчення руху плоскої фігури у площині руху?
3. Яке число степенем вільності має тіло, що рухається плоскопаралельно?
4. Довести, що вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ не залежать від вибору полюса *0*.
5. Як визначається швидкість будь-якої точки плоскої фігури ?
6. Дати визначення обертальної швидкості і обертального прискорення точки M плоскої фігури у русі відносно полюса.
7. Чим відрізняються поняття: «повне обертальне прискорення точки у русі відносно полюса» і «обертальна складова прискорення у русі відносно полюса» ?
8. Як спрямований вектор $\vec{w}_{OM}^{Об}$ відносно полюса і чому дорівнює його модуль?
9. За якою теоремою визначають прскорення довільної точки тіла при плоскопаралельному русі?
10. Яку складову в прискоренні точки називають доцентровим прискоренням і чому?
11. Як побудувати план швидкостей?
12. Як побудувати план прискорень?

4.3. Тестові запитання та завдання

4.1

Тіло при плоскопаралельному русі має ….. степеней вільності.

4.2

Вкажіть кінематичні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла, якщо положення полюса визначається координатами $\xi_0\eta_0$, а кутове положення тіла – координатою φ:

A. $\xi_0 = \xi_0(t),\ \eta_0 = \eta_0(t)$

B. $\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1,\ \varphi = \varphi(t)$

C. $\xi_0 = \xi_0(t),\ \eta_0 = \eta_0(t),\ \varphi = \varphi(t)$

4.3

У випадку плоскопаралельного руху тіла кожна його точка протягом усього часу рухається в одній і тій самій площині,…… деякій нерухомій площині.

4.4

Тіло G здійснює плоскопаралельний рух. Відомі координати ξ, η точки M в нерухомій системі координат та координати x, y точки M в рухомій системі координат, яка жорстко пов'язана з тілом G. Сталими є координати:

A. $\xi_0 \eta_0$ B.x, y C. ξ_0, x D. $\eta_0,$

4.5

Якщо тіло рухається довільно в площині Oxy, то

A. $\omega_x \neq 0,\ \omega_y \neq 0,\ \omega_z \neq 0$ B. $\omega_x \neq 0,\ \omega_y = \omega_z = 0$

C. $\omega_x = \omega_z = 0,\ \omega_y \neq 0$ D. $\omega_x = \omega_z = 0,\ \omega_z \neq 0$

4.6

При визначенні швидкості точки тіла при плоскопаралельному русі вектор кутової швидкості

A. залежить від вибору точки в тілі і від вибору полюса

B. залежить від вибору точки в тілі і не залежить від вибору полюса

C. не залежить від вибору точки в тілі і залежить від вибору полюса

D. не залежить від вибору точки в тілі і вибору полюса

4.7

У випадку плоскопаралельного руху тіла вектор кутової швидкості тіла спрямований…… до основної площини.

4.8

Формула для швидкості точки M у випадку плоскопаралельного руху тіла має вигляд: $\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \cdots$

A.$\ddot{\omega} \times \overrightarrow{OM}$ B. $\overrightarrow{OM} \times \vec{\omega}$ C. 0

4.9

Згідно теореми Грасгофа:

A. $(\vec{v}_M)_{OM} = (\vec{v}_O)_{OM}$ B. $(\vec{v}_M)_{OM} = -(\vec{v}_O)_{OM}$ C. $(\vec{v}_M)_{OM} = (\vec{v}_{OM})_{OM}$

4.10

При визначені прискорення точки у випадку плоскопаралельного руху тіла вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$

A. залежить від вибору полюса

B. залежить від вибору точки тіла

C. не залежить від вибору полюса і точки тіла

4.11

У випадку плоскопаралельного руху тіла вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ характеризує зміну вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$

A. тільки за модулем
B. тільки за напрямом
C. одночасно за модулем і за напрямом

4.12

У випадку плоскопаралельного руху тіла вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$

A. не змінює свій напрям в просторі
B. може міняти напрям тільки на протилежний
C. може міняти напрям довільно

4.13

Якщо тіло G рухається в площині Oxy, то вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований вздовж або протилежно осі

A. Oz B. Oy C. Ox

4.14

При визначенні прискорення точки у випадку плоскопаралельного руху полюс вибирають

A. тільки в центрі мас тіла
B. тільки в точці, швидкість якої дорівнює нулю
C. в будь-якій точці тіла

4.15

Вкажіть формулу для обертального прискорення $\vec{W}_{OM}^{\text{об}}$ точки M у випадку плоскопаралельного руху тіла:

A. $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}$ B. $\overrightarrow{OM} \times \vec{\varepsilon}$ C. $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right)$

4.16

У випадку плоскопаралельного руху тіла при збільшенні кутової швидкості в 3 рази доосьове прискорення точки $\vec{W}_{\text{OM}}^{\text{ос}}$ збільшення в ….. разів.

4.17

У випадку плоскопаралельного руху тіла модуль обертального прискорення $\vec{W}_{OM}$ дорівнює:

A. $OM(\varepsilon + \omega^2)$ B. $OM\sqrt{\varepsilon^2 + +\omega^4}$ C. $OM\sqrt{\varepsilon + +\omega^2}$

4.18

У випадку плоскопаралельного руху тіла обертальну складову прискорення $\vec{W}_{\text{OM}}^{\text{об}}$ і дотичну складову прискорення $\vec{W}_{M}^{\tau}$ тієї ж точки ототожнювати

А. можна　　В. не можна　　С. можна, якщо $\varepsilon = const$

4.19

У випадку плоскопаралельного руху тіла доцентрову складову прискорення $\vec{W}_{\text{OM}}^{oc}$ і нормальну складову $\vec{W}_M^n$ тієї ж точки ототожнювати

А. можна　　В. не можна　　С. можна, якщо $\varepsilon = const$

4.20

Вкажіть проекцію вектора прискорення точки фігури на вісь $O\xi$ нерухомої системи координат, якщо відома координата точки на цю вісь $\xi_M = 5t + 3cos4t$:

А. $48cos4t$　　B. $48sin4t$　　C. $5 - 12sin4t$　　D. $-48cos4t$

4.21

Вкажіть проекцію вектора прискорення точки фігури на вісь 0ξ нерухомої системи координат, якщо відома проекція швидкості точки на цю вісь $v_\xi = 5t + 3\cos 4t$:

А. $5 + 12sin4t$　　B. $5 - 12sin4t$　　C. $-48cos4t$

4.22

Вкажіть проекцію вектора швидкості точки фігури на вісь $O\eta$ нерухомої системи координат, якщо відома координата точки $\eta = 5t^2 + 3\sin 4t$:

А. $10t + 12\cos 4t$　　B. $10t - 12\cos 4t$　　C. $-48\sin 4t$

4.23

Якщо точка P – це миттєвий центр швидкостей тіла, то

А. $v_p > 0$　　B. $v_p = 0$　　C. $v_p < 0$

4.24

Точка в площині руху фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається ……. швидкостей.

4.25

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей в нерухомій площині називається нерухомою…..

4.26

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей в рухомій площині називається рухомою….

4.27

В кожний момент часу швидкості точок плоскої фігури можна розглядати як швидкості точок фігури в її обертальному русі навколо миттєвого …….. швидкостей.

Розділ 5
Синтез рухів

Розглянемо випадки складного руху тіла, який є результатом обертань навколо кількох осей. Як відомо, такі обертальні рухи твердого тіла можна розглядати в кожний момент часу як один обертальний рух навколо миттєвої осі. Цей рух є результатом додавання складових обертальних рухів. І в цьому випадку необхідно визначити характеристики руху тіла в цілому та характеристики руху окремих його точок.

5.1. Обертання навколо паралельних осей

Нехай у рухомій системі координат тіло обертається навколо осі O_1 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, а ця вісь разом із рухомою системою обертається навколо паралельної її осі O_2 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ (рис. 5.1). Таким чином, тіло одночасно перебуває в двох обертальних рухах навколо паралельних осей.

Визначимо миттєву вісь обертання в трьох випадках:

1) вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ напрямлено в один бік;

2) вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ напрямлено в протилежні боки;

3) вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ напрямлено в протилежні боки і рівні за величиною.

Розглянемо окремо кожен з цих випадків:

1. Якщо вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ паралельні і напрямлені в один бік, то обертальний рух тіла з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ можна розглядати як відносний рух, а обертальний рух тіла з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ – як переносний рух.

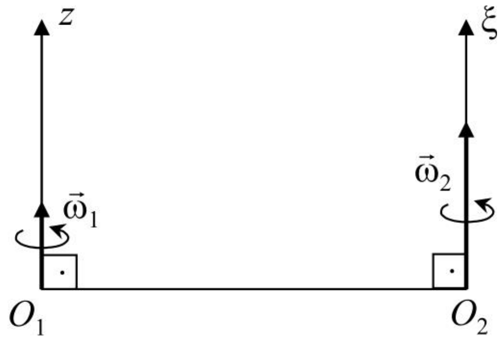


Рис. 5.1

У цьому випадку обертання відбуваються в одному напрямку. Система двох обертань зводиться до одного обертального руху навколо миттєвої осі, паралельної осям складових (відносного і переносного) обертальних рухів.

Абсолютну миттєву кутову швидкість $\vec{\omega}_a$ напрямлено в тому самому напрямку, що й $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\omega}_r$. Модуль її визначають за формулою

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \tag{5.1}$$

Миттєва вісь абсолютного обертання в цьому випадку обертання поділяє відстань між осями переносного і відносного обертань внутрішньо у відношенні, обернено пропорційному величинам складових кутових швидкостей (рис. 5.2), а саме:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

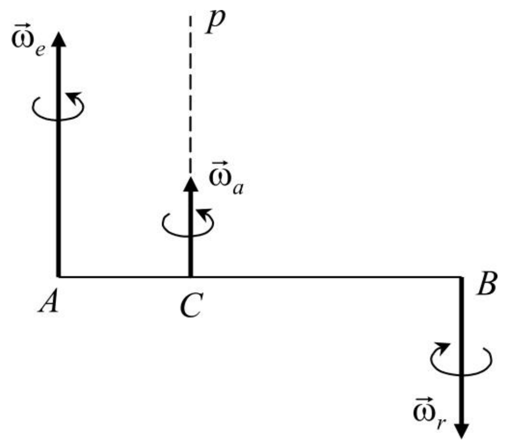


Рис. 5.2

2. Якщо миттєві кутові швидкості складових обертань паралельні і мають різні напрямки, то в цьому разі обертання відбуваються в різних напрямках (рис. 5.3). Система двох обертань зводиться до одного обертального руху навколо миттєвої осі, паралельної осям складових (відносного і переносного) обертальних рухів.

Абсолютна миттєва кутова швидкість має напрямок більшої зі складових кутових швидкостей.

Модуль вектора $\vec{\omega}_a$ визначають за формулами:

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e, \text{ якщо } \omega_r > \omega_e;$$
$$\omega_a = \omega_e - \omega_r, \text{ якщо } \omega_r < \omega_e.$$

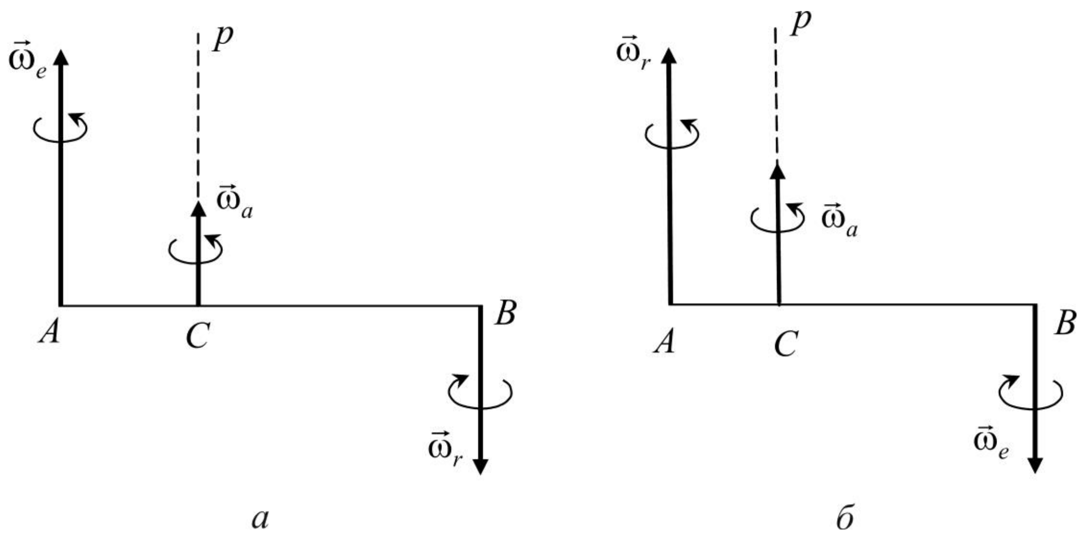


Рис. 5.3

Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє відстань між осями зовнішньо у відношенні, обернено пропорційному величинам складових швидкостей:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

3. Якщо обертання твердого тіла відбувається навколо паралельних осей з однаковими за модулями, але протилежно напрямленими кутовими швидкостями ($\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$), то такі обертання утворюють пару обертань.

Пара миттєвих обертань еквівалентна миттєвому поступальному руху зі швидкістю

$$v = \omega h,$$

де $\omega = \omega_r = \omega_e$, а h – найкоротша відстань між осями складових обертальних рухів (плече пари).

Вектор $\vec{v}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_r$ та $\vec{\omega}_e$ і напрямлений так, що для спостерігача з кінця вектора $\vec{v}$ вектори $\vec{\omega}_r$ та $\vec{\omega}_e$ вказують на обертання проти годинникової стрілки (рис. 5.4).

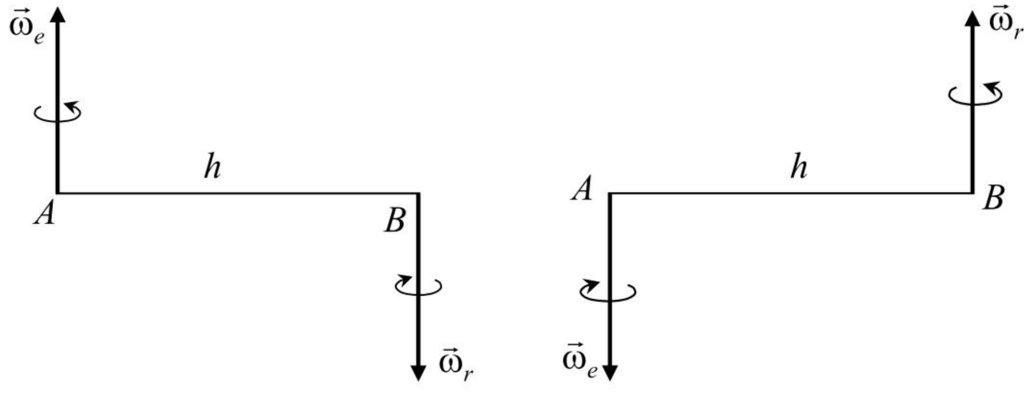


Рис. 5.4

5.2. Обертання навколо осей, що перетинаються в одній точці

Якщо тверде тіло обертається навколо осей, що перетинаються в одній точці, то в цьому випадку система двох обертань зводиться до одного обертального руху навколо миттєвої осі, яка проходить через точку перетину осей складових (відносного і переносного) обертальних рухів (рис. 5.5).

Абсолютна миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}_a$ дорівнює геометричній сумі відносної $\vec{\omega}_r$ і переносної $\vec{\omega}_e$ кутових швидкостей:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

Модуль ω_a визначають за формулою

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e\omega_r \cos(\widehat{\omega_e, \omega_r})}.$$

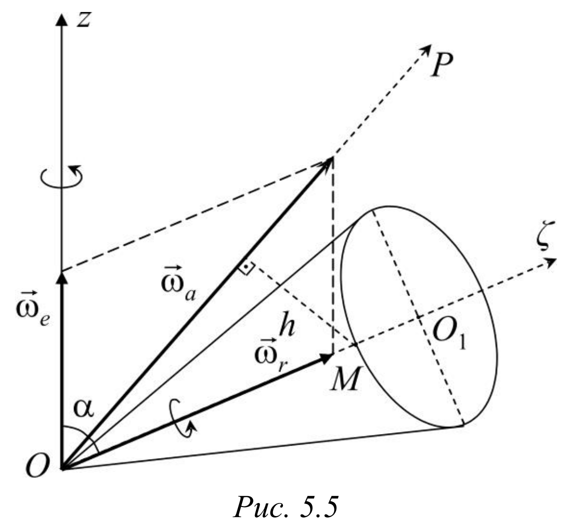


Рис. 5.5

Відповідно, метод розв'язання задач, що ґрунтується на вказаних розрахункових формулах, має назву «метод миттєвих осей». Іноді доцільно використовувати «метод зупинення», який полягає в тому, що уявно зупиняють ту ланку механізму, яка надає йому переносного руху і , розглядаючи попарні сполучення ланок, складають співвідношення між кутовими швидкостями інших ланок механізму.

У випадку внутрішнього зачеплення ланок відношення кутових швидкостей додатне, а у випадку зовнішнього зачеплення ланок – від'ємне.

Якщо відоме положення миттєвої осі обертання, то швидкість довільної точки тіла визначають за формулою Ейлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Модуль швидкості

$$v = \omega\, r \sin(\vec{\omega}_r \hat{,} \vec{\omega}_e) \text{ або } v = \omega h,$$

де h – перпендикуляр, опущений з точки на миттєву вісь обертання (рис. 5.5).

Напрям $\vec{v}$ визначають за правилом векторного добутку векторів.

Швидкість точки M можна визначити також, користуючись теоремою додавання швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Прискорення довільної точки M твердого тіла визначають за формулою

$$\vec{w}_M = \vec{w}^{\text{об}} + \vec{w}^{\text{ос}};$$

$$w^{\text{об}} = \varepsilon h_1;$$

$$w^{\text{ос}} = \omega^2 h,$$

де ω – миттєва кутова швидкість обертання; h – перпендикуляр, опущений із точки на миттєву вісь; ε – миттєве кутове прискорення, напрямок якого визначають за формулою $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}$ або $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$, а h_1 – перпендикуляр, опущений з точки на напрямок миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Обертальне прискорення $\vec{w}^{\text{об}}$ напрямлене нормально до h_1 у напрямку обертання, якщо тіло обертається прискорено, і в протилежному напрямку, якщо тіло обертається сповільнено.

Доосьове прискорення $\vec{w}^{\text{ос}}$ напрямлено вздовж h до осі обертання.

Прискорення довільної точки можна також визначити, користуючись теоремою Коріоліса і методами плоскопаралельного руху, якщо тверде тіло обертається навколо паралельних осей.

Під час розв'язання задач на синтез рухів (додавання обертань) можуть траплятись такі типи задач:

1) за заданими миттєвою і переносною кутовими швидкостями визначити відносну кутову швидкість;

2) за заданими кутовими швидкостями складових обертальних рухів визначити характер результуючого руху;

3) за заданими переносною і відносною кутовими швидкостями планетарних і зубчастих передач визначити миттєву кутову швидкість довільної ланки, швидкість і прискорення будь-якої його точки;

4) за заданою переносною кутовою швидкістю та передатним числом обертань визначити відносні кутові швидкості, швидкості та прискорення окремих точок;

5) за заданою абсолютною кутовою швидкістю ланки механізму визначити переносні і відносні кутові швидкості окремих ланок.

Задача 41

Штучний супутник Землі за дві години робить одне обертання. Визначити його відносну кутову швидкість відносно Землі, що обертається навколо своєї осі, якщо орбіта супутника збігається з екваторіальною площиною Землі і супутник рухається зі сходу на захід. Орбіту супутника вважати коловою.

Розв'язання

Земля обертається із заходу на схід із кутовою швидкістю, що відповідає $\frac{1}{24}$ об/год$=\frac{1}{24\cdot 60}$ об/хв.

За переносний рух приймаємо обертальний рух Землі.

Переносна кутова швидкість (рад/с)

$$\omega_e = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi\cdot 1}{24\cdot 30\cdot 60} = \frac{\pi}{24\cdot 1800} = \frac{\pi}{43200}.$$

Абсолютна кутова швидкість обертання супутника Землі (рад/с), виходячи з умови задачі (якщо $n_a = \frac{1}{2}$ об/год),

$$\omega_a = \frac{\pi n_a}{30} = \frac{\pi}{2\cdot 60\cdot 30} = \frac{\pi}{3600}.$$

Ця кутова швидкість напрямлена в протилежний напрямок $\vec{\omega}_e$, оскільки супутник рухається зі сходу на захід. Згідно з формулами додавання обертальних рухів маємо:

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e ,$$

звідки отримуємо:

$\omega_r = \omega_a + \omega_e = \frac{\pi}{3600} + \frac{\pi}{24\cdot 1800} = \frac{12\pi+\pi}{12\cdot 3600}$ рад/с, що відповідає $\frac{13}{24}$ об/год.

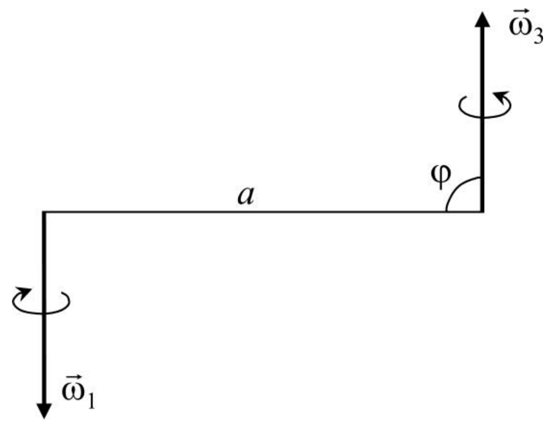


Рис. 5.6

Задача 42

Знайти результативний рух трьох обертальних рухів, які відбуваються одночасно (рис. 5.6). Два з цих обертань мають однакові і протилежно напрямлені кутові швидкості $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_3$.

Відстань між осями дорівнює a. Третя вісь перетинає перші осі під довільним кутом φ; кутова швидкість третього обертального руху ω_2.

Розв'язання

Як відомо, миттєвий поступальний рух еквівалентний парі обертань. Отже, $\vec{\omega}_3$ і результативний вектор $\vec{\omega}$, знайдений додаваннями $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$, утворюють пару. Тоді

$$\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_3;$$

$$\omega_1 = \omega_3, \text{ а } \omega_2 = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Швидкість миттєвого поступального руху дорівнює моменту пари кутових швидкостей, тобто $v = \omega_3 a$. Швидкість $\vec{v}$ перпендикулярна до площини рисунка в правій системі координат.

Задача 43

Тілу надається одночасно три обертальні рухи відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, що не перетинаються в одній точці, з кутовими швидкостями ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ (рис. 5.7). Визначити абсолютний рух тіла.

Розв'язання

Перенесемо ковзний вектор $\vec{\omega}_2$ паралельно самому собі в точку O (рис. 5.8), приєднаємо пару, момент якої $v_2 = a\omega_2 = 2a\omega_1$. Додаючи два обертальні рухи з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_3$, отримаємо результуючий обертальний рух із кутовою швидкістю, яка дорівнює векторній сумі (рис. 5.8):

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

Модуль $\vec{\Omega}$

$$\Omega = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{4\omega_1^2 + 9\omega_1^2} = \omega_1\sqrt{13}.$$

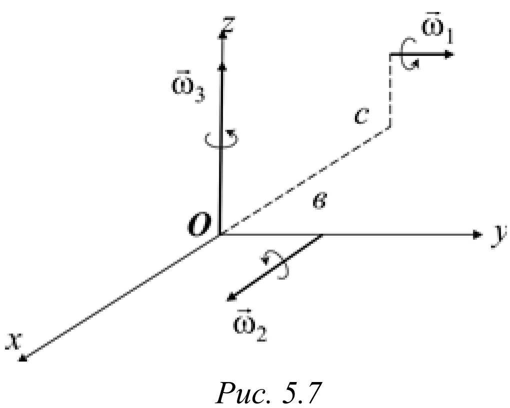


Рис. 5.7

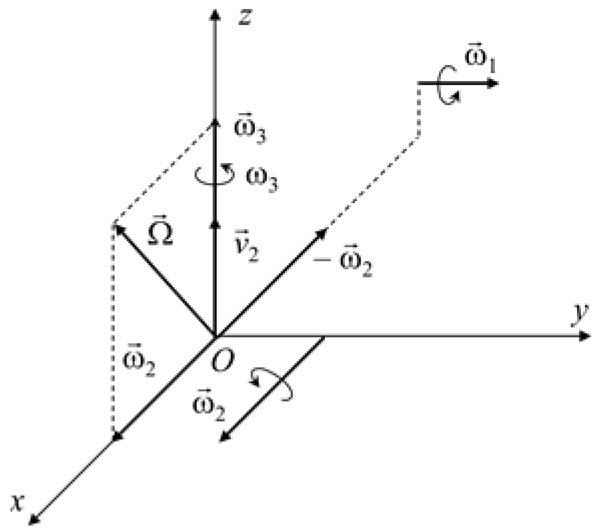


Рис. 5.8

Перенісши $\vec{\omega}_1$ паралельно самому собі в точку O (рис. 5.9), приєднаємо пару, момент якої дорівнює

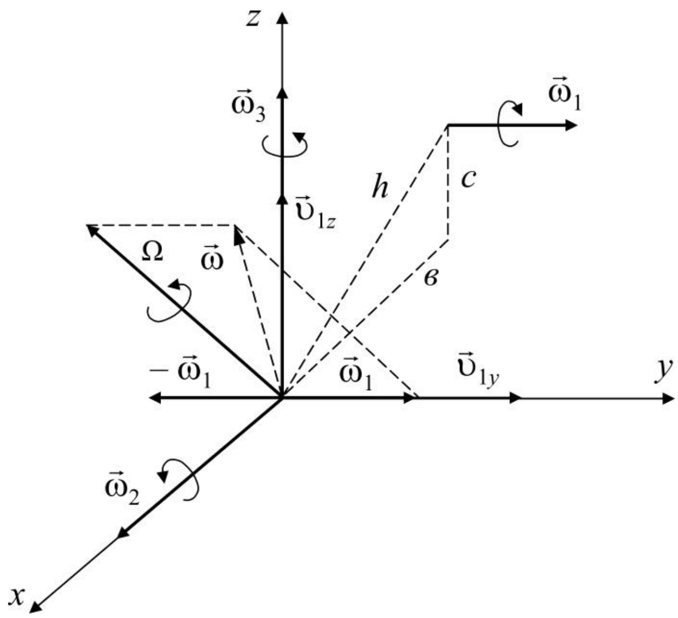


Рис. 5.9

$$v_1 = \omega_1 h = \omega_1 \sqrt{b^2 + c^2}$$

або $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1z} + \vec{v}_{1y}$,

де $v_{1z} = \omega_1 b$; $v_{1y} = \omega_1 c$.

Додаючи $\vec{\Omega}$ і $\vec{\omega}_1$, отримаємо результуючу кутову швидкість $\vec{\omega}$ (рис. 5.10, *а*):

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

Результуюча швидкість миттєвого поступального руху

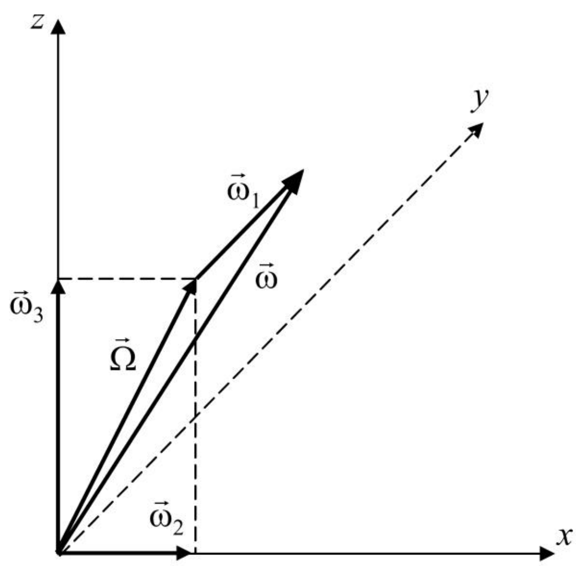
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \text{де} \quad v_2 = \omega_2 a.$$

Таким чином, отримуємо миттєвий гвинтовий рух із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і швидкістю поступального руху $\vec{v}$.

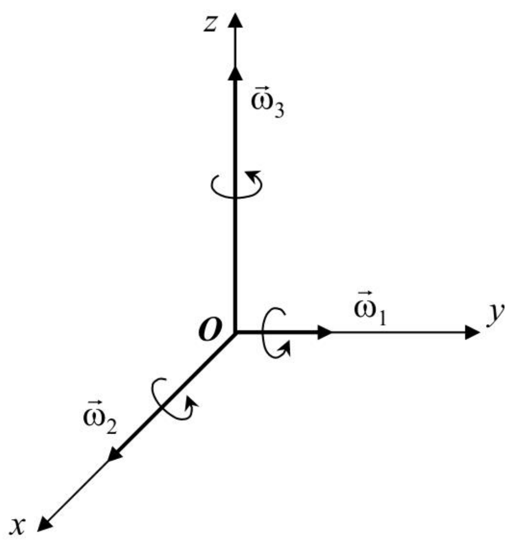
Знаходимо величину миттєвої кутової швидкості за її проекціями на осі координат:

$$\omega_x = 2\omega_1; \ \omega_y = \omega_2 = 2\omega_1; \ \omega_z = \omega_3 = 3\omega_1.$$

Отже, $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{14\omega_1^2} = \omega_1\sqrt{14}$ (рис. 5.10, *б*)



а



б

Рис. 5.10

Напрямок миттєвої кутової швидкості визначимо за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}, x}) = \cos\alpha_1 = \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}, y}) = \cos\beta_1 = \frac{\omega_y}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{14}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}, z}) = \cos\gamma_1 = \frac{\omega_z}{\omega} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Визначимо проекції швидкості $\vec{v}$ на осі координат:

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} = 0;$$

$$v_y = v_{1y} + v_{2y} = \omega_1 c;$$

$$v_z = \omega_1 a + 2\omega_1 a = 3\omega_1 a.$$

Швидкість миттєвого поступального руху

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega_1\sqrt{c^2 + 9a^2}.$$

Напрям швидкості визначимо за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{v}, x}) = \cos\alpha_2 = \frac{v_x}{v} = 0;$$

$$\cos(\widehat{\vec{v}, y}) = \cos\beta_2 = \frac{v_y}{v} = \frac{c}{\sqrt{c^2+9a^2}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{v}, z}) = \cos\gamma_2 = \frac{v_z}{v} = \frac{3a}{\sqrt{c^2+9a^2}}.$$

Якщо вираз

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

не дорівнює нулю, то отримаємо миттєвий гвинтовий рух (кінету):

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{14}}0 + \frac{2}{\sqrt{14}}\frac{c}{\sqrt{c^2+9a^2}} + \frac{9a}{\sqrt{14}}\frac{1}{\sqrt{c^2+9a^2}} \neq 0;$$

$$\cos\varphi = \frac{2c + 9a}{\sqrt{c^2+9a^2}}\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Кінета має миттєву кутову швидкість

$$\omega = \omega_1\sqrt{14}$$

і швидкість миттєво-поступального руху

$$u = v\cos\varphi = \omega_1\sqrt{c^2 + 9a^2}\frac{2c+9a}{\sqrt{c^2+9a^2}}\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\omega_1(2c+9a)}{\sqrt{14}}.$$

Задача 44

У планетарній передачі кривошип O_1O_4 приводить у рух колесо I, яке обертається навколо осі O_1 (рис. 5.11). Колесо I має обертатися з кутовою швидкістю, що відповідає 6600 об/хв. Радіуси коліс $r_1 = 10$ см, $r_2 = 20$ см, $r_3 = 8$ см, $r_4 = 5$ см. Яку кутову швидкість Ω необхідно надати кривошипу, щоб забезпечити вказану кутову швидкість колеса I? Визначити також кутові швидкості коліс II і IV.

Розв'язання

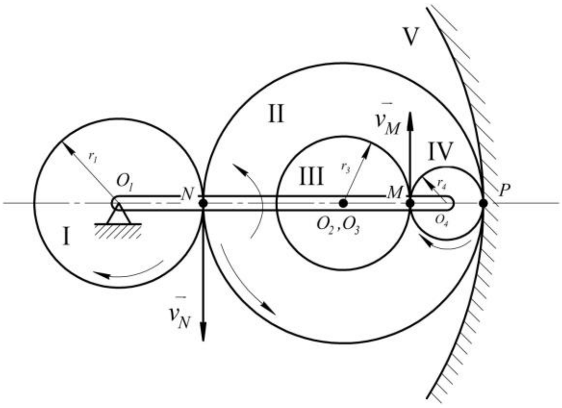


Рис. 5.11

Позначимо кутові швидкості коліс I, II, IV, V відповідно через ω_1, ω_2, ω_4, ω_5. Кутова швидкість колеса III дорівнює ω_2, оскільки колеса II і III насаджено на одну вісь. Через те що осі коліс паралельні до площини, в якій рухається планетарний механізм, то маємо випадок додавання обертань навколо паралельних осей.

I. *Для розв'язання цієї задачі скористаємося методом «миттєвих осей обертань»*. Для цього розглянемо послідовно рухи коліс. Колесо IV бере участь у двох обертальних рухах: переносному навколо осі O_1 разом із кривошипом O_1O_4 з кутовою швидкістю $\omega_{4e} = \Omega$ і відносному з кутовою швидкістю ω_{4r}.

Оскільки миттєва вісь абсолютного обертального руху проходить через точку P (рис. 5.11), яка розміщена зовнішньо відносно O_1O_4, то обертання колеса IV навколо осей O_1 і O_4 відбуваються в різних напрямках.

Отже,

$$\omega_4 = \omega_{4e} - \omega_{4r} \text{ і } \frac{\Omega}{\omega_{4r}} = \frac{O_4P}{O_1P} = \frac{r_4}{r_5},$$

де $O_1P = r_5$, $\omega_{4e} = \Omega$. Тоді $\omega_{4r} = \dfrac{\Omega r_5}{r_4}$.

Абсолютна кутова швидкість колеса IV

$$\omega_4 = \Omega - \Omega\frac{r_5}{r_4} = \Omega\left(1 - \frac{r_5}{r_4}\right).$$

Переносна кутова швидкість колеса III $\omega_{3e} = \Omega$, а відносну кутову швидкість його знайдемо, розглянувши швидкість точки M дотику коліс IV і III. З одного боку, $v_{Mr} = \omega_{4r}\, r_4$, а з другого боку, $v_{Mr} = \omega_{3r}\, r_3$.

Отже,

$$\omega_{3r} = \frac{\omega_{4r} r_4}{r_3} = \frac{\Omega r_4 r_5}{r_3 r_4} = \frac{\Omega r_5}{r_3}.$$

Оскільки з'єднання коліс III і IV зовнішнє, то колеса III і IV обертаються навколо своїх осей у різних напрямках (рис. 5.11). Але напрямки переносного і відносного рухів колеса III будуть однакові.

На підставі цього

$$\omega_3 = \omega_{3e} + \omega_{3r} = \Omega + \Omega\frac{r_5}{r_3} = \Omega(1 + \frac{r_5}{r_3});\ \omega_2 = \omega_3.$$

Кутова швидкість колеса II буде така сама, як і кутова швидкість колеса III, оскільки колеса II і III мають спільну вісь обертання. Нарешті розглянемо рух колеса I, який являє собою обертальний рух навколо осі O_1. Кутову швидкість його знайдемо, розглянувши швидкість точки N дотику коліс I і II.

З одного боку, $v_{Nr} = \omega_{2r} r_2 = \frac{\Omega r_5}{r_3} \cdot r_2$, а з другого боку, $v_{Nr} = \omega_{1r} r_1$. Прирівнявши ці вирази, отримаємо:

$$\omega_{1r} = \frac{\Omega r_5 r_2}{r_1 r_3}.$$

Оскільки обертання колеса I відбувається в протилежному напрямку до обертання кривошипа, то його абсолютна кутова швидкість

$$\omega_1 = \omega_{1e} - \omega_{1r} = \Omega - \frac{\Omega r_5 r_2}{r_1 r_3} = \Omega\,(1 - \frac{r_5 r_2}{r_1 r_3}).$$

Обчислимо Ω, виходячи з умови задачі, щоб ω_1 відповідала $n_1 = 6600$ об/хв.

Отже, $\Omega = \frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_1 r_3 - r_5 r_2}$ або

$$n = \frac{n_1 r_1 r_3}{r_1 r_3 - r_5 r_2} = \frac{6600 \cdot 10 \cdot 8}{10 \cdot 8 - 48 \cdot 20} = \frac{6600 \cdot 80}{80 - 960} = -\frac{6600 \cdot 80}{880} = -\,600 \text{ об/хв.}$$

Знак «мінус» вказує на те, що кривошип обертається в напрямку, протилежному обертанню колеса I. Тут $r_5 = O_1P = 48$ см,

$$n_2 = n(1 + \frac{r_5}{r_3}) = 600 \cdot (1 + \frac{48}{8}) = 4200 \text{ об/хв};$$

$$n_4 = n(1 - \frac{r_5}{r_4}) = 600 \cdot (1 - \frac{48}{5}) = -5160 \text{ об/хв.}$$

2. *Розв'яжемо цю саму задачу «методом зупинення»*.

Іноді доцільно застосовувати «метод зупинення», який полягає в тому, що уявно зупиняють ту ланку механізму, яка надає йому переносного руху. Для цього складаємо таблицю значень кутових швидкостей усіх ланок до і після зупинення. Оскільки після зупинення певної ланки всі інші будуть виконувати звичайні обертальні рухи навколо нерухомих осей, то, розглядаючи попарні з'єднання ланок, складаємо співвідношення між кутовими швидкостями всіх ланок механізму за формулами (2.11) і (2.12).

Нагадаймо, що за зовнішнього зачеплення коліс відношення кутових швидкостей від'ємне, а за внутрішнього – додатне.

Повернемось до задачі. Оскільки переносний рух коліс здійснюється кривошипом O_1O_4, то саме його уявно зупиняємо.

Складемо таблицю значень кутових швидкостей усіх коліс до і після зупинення кривошипа (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Кутові швидкості ланки ω	Кривошип O_1O_4	Колеса				
		I	II	III	IV	V
До зупинення кривошипа	Ω	ω_1	ω_2	$\omega_2 = \omega_3$	ω_4	0
Після зупинення кривошипа	0	$\omega_1 - \Omega$	$\omega_2 - \Omega$	$\omega_2 - \Omega$	$\omega_4 - \Omega$	$-\Omega$

Розглядаючи зачеплення коліс I і II, запишемо:

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Потім, розглядаючи зачеплення коліс III і IV, запишемо:

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = -\frac{r_4}{r_3}.$$

Перемножуючи почленно першу пропорцію на другу, отримаємо:

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_4 - \Omega} = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}. \tag{5.2}$$

Розглядаючи зачеплення коліс IV і V, запишемо:

$$\frac{\omega_4 - \Omega}{-\Omega} = \frac{r_5}{r_4}, \text{ звідки } \omega_4 = \frac{\Omega(r_4 - r_5)}{r_5}.$$

Підставивши значення ω_4 у рівняння (5.2), знайдемо Ω:

$$\Omega = \frac{\omega_1 \cdot r_3 \cdot r_1}{r_3 \cdot r_1 - r_2 \cdot r_5} = \frac{6600 \cdot 8 \cdot 10}{8 \cdot 10 - 20 \cdot 48} = -600 \text{ об/хв.}$$

Порівнюючи обидва методи, робимо висновок, що метод зупинення більш простий і потребує меншої затрати часу.

Задача 45

Редуктор швидкостей складається з нерухомої шестірні радіуса $r_1 = 40$ см, двох шестерень радіусів $r_2 = 20$ см, $r_3 = 30$ см, спарених між собою, і шестірні з внутрішнім зачепленням радіуса $r_4 = 90$ см, яка сидить на веденому валі (рис. 5.12). Ведучий вал I і кривошип, на якому розміщені осі біжучих шестерень, виконують 1800 об/хв. Визначити кількість обертів за хвилину веденого вала II.

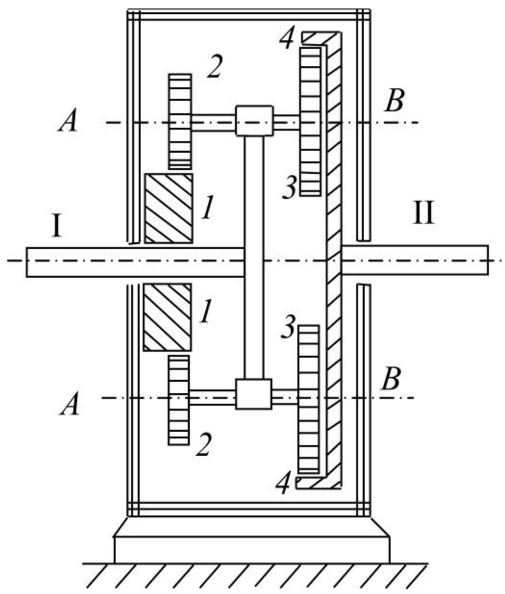


Рис. 5.12

Розв’язання

Досліджуючи роботу редуктора, бачимо, що спарені біжучі шестерні 2 і 3 беруть участь у двох обертаннях: у переносному навколо осі I й у відносному навколо осі AB.

Оскільки переносний рух біжучих шестерень здійснюється валом I, то уявно зупиняємо цей вал, кутова швикість якого (рад/с)

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{1800\pi}{30} = 60\,\pi.$$

Складемо таблицю значень кутових швидкостей коліс до і після зупинення вала (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Кутові швидкості ω	Ланки					
	Вал I	Колесо I	Колесо I	Колесо III	Колесо IV	Вал II
До зупинення вала I	$60\,\pi$	0	ω_2	$\omega_2 = \omega_3$	ω_4	$\omega_{II} = \omega_4$
Після зупинення вала I	0	$-60\,\pi$	$\omega_2 - 60\,\pi$	$\omega_2 - 60\,\pi$	$\omega_4 - 60\,\pi$	$\omega_{II} - 60\,\pi$

Зачеплення коліс 1 і 2 зовнішнє, тому

$$\frac{-60\pi}{\omega_2 - 60\pi} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Зачеплення коліс 3 і 4 внутрішнє, тому

$$\frac{\omega_2 - 60\pi}{\omega_4 - 60\pi} = \frac{r_4}{r_3} \qquad \text{або} \qquad \frac{\omega_2 - 60\pi}{\omega_{II} - 60\pi} = \frac{r_4}{r_3},$$

оскільки кутові швидкості вала II і колеса IV однакові.

Перемножуючи пропорції, отримаємо:

$$\frac{60\pi}{\omega_{II} - 60\pi} = \frac{r_2}{r_1}\frac{r_4}{r_3},$$

звідки

$$\omega_{II} = 60\,\pi\,(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}) = 60\,\pi\,(1 + \frac{40\cdot 30}{20\cdot 90}) = 100\,\pi \text{ рад/с}$$

або

$$n_{II} = \frac{30}{\pi}\,\omega_{II} = \frac{30\cdot 100\cdot\pi}{\pi} = 3000 \text{ об/хв}.$$

Задача 46

В епіциклічній передачі (рис. 5.13) ведуча шестірня радіусом R обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω_0 і кутовим прискоренням ε_0, кривошип OA довжини $3R$ обертається навколо її осі за годинниковою стрілкою з тією самою кутовою швидкістю із тим же кутовим прискоренням. Визначити кутову

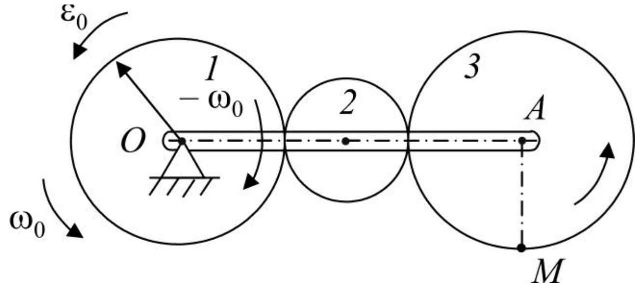


Рис. 5.13

швидкість і кутове прискорення колеса *3*, а також швидкість і прискорення точки *M* веденої шестірні *3* радіуса *R*, що лежить на кінці діаметра, перпендикулярного в заданий момент часу до кривошипа.

Розв'язання

1. Визначимо кутову швидкість шестірні *3*. Шестірні беруть участь у двох обертаннях: у переносному навколо осі *O* і у відносному навколо своїх осей, які лежать на кривошипі *OA*. Оскільки переносний рух здійснюється кривошипом *OA*, то уявно зупиняємо його, надаючи йому обертального руху з кутовою швидкістю ω_0.

Складемо таблицю значень кутових швидкостей до і після зупинення кривошипу *OA* (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Кутові швидкості ω	Ланки			
	Кривошип *OA*	Шестірня 1	Шестірня 2	Шестірня 3
До зупинення кривошипа *OA*	$-\omega_0$	$\omega_1 = \omega_0$	ω_2	ω_3
Після зупинення кривошипа *OA*	0	$\omega_1 + \omega_0 = 2\omega_0$	$\omega_2 + \omega_0$	$\omega_3 + \omega_0$

Складемо пропорції, беручи до уваги зовнішнє зачеплення коліс *1* і *2*, *2* і *3*:

$$\frac{2\omega_0}{\omega_2+\omega_0} = -\frac{\frac{R}{2}}{R};$$

$$\frac{\omega_2+\omega_0}{\omega_3+\omega_0} = -\frac{R}{\frac{R}{2}}.$$

Перемножуючи пропорції, отримаємо:

$$\frac{2\omega_0}{\omega_3+\omega_0}=1,$$

звідки

$$\omega_3 = \omega_0 .$$

Отже, колесо *3* обертається проти годинникової стрілки, маючи в даний момент часу кутову швидкість ω_0, а його кутове прискорення

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} = \varepsilon_0.$$

2. Оскільки рух епіциклічної передачі відбувається на площині, то для визначення швидкості і прискорення довільної точки механізму скористаємося теоремами і формулами плоскопаралельного руху.

Виберемо за полюс точку *A*, оскільки вона одночасно належить колесу *3* і кривошипу.

Величина швидкості точки A $v_A = \omega_o 3R$ і вектор $\vec{v}_A$ напрямлений нормально до OA в напрямку обертання кривошипа (рис. 5.14). Швидкість точки M в обертальному її русі навоколо полюса

$$v_{MA} = \omega_3 MA = \omega_o R \ ,$$

а вектор $\vec{v}_{MA}$ напрямлений нормально до MA в бік обертання шестірні 3.

Швидкість точки M визначимо за формулою (4.1):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM} \, .$$

Складаючи вектори геометрично (рис. 5.14), знаходимо значення швидкості точки M:

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{AM}^2} = \sqrt{(3\omega_0 r)^2 + (\omega_0 R)^2} = \omega_0 R\sqrt{10}.$$

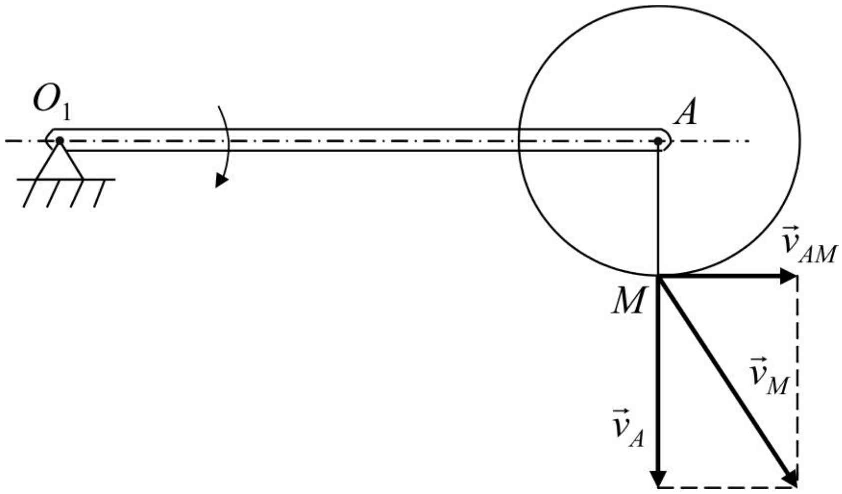


Рис. 5.14

Прискорення точки M визначимо за формулою (4.6):

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{AM}^{\text{об}} + \vec{w}_{AM}^{\text{доц}} \, .$$

Точка A належить кривошипу OA, тому

$$\vec{w}_A = \vec{w}_{A\tau} + \vec{w}_{An} \ ;$$

$$w_{An} = \omega_0^2 OA = 3\ \omega_0^2\ R \ ,$$

$\vec{w}_{An}$ напрямлено вздовж OA до осі O.

Величина $w_{A\tau} = \varepsilon OA = 3\ \varepsilon_o R$, а

$\vec{w}_{A\tau}$ напрямлено перпендикулярно до OA в бік обертання кривошипа OA.

Доцентрове прискорення точки M в обертальному русі навколо полюса A

$$w_{AM}^{\text{доц}} = \omega_3^2\ MA = \omega_0^2\ R \ ,$$

$\vec{w}_{AM}^{\text{доц}}$ напрямлено вздовж радіуса MA до полюса A.

Обертальне прискорення точки M в обертальному русі навколо полюса A

$$w_{AM}^{\text{об}} = \varepsilon_3 MA = \varepsilon_o R \ ,$$

$\vec{w}_{AM}^{\text{об}}$ напрямлено перпендикулярно до MA в бік обертання шестірні 3 (рис. 5.15).

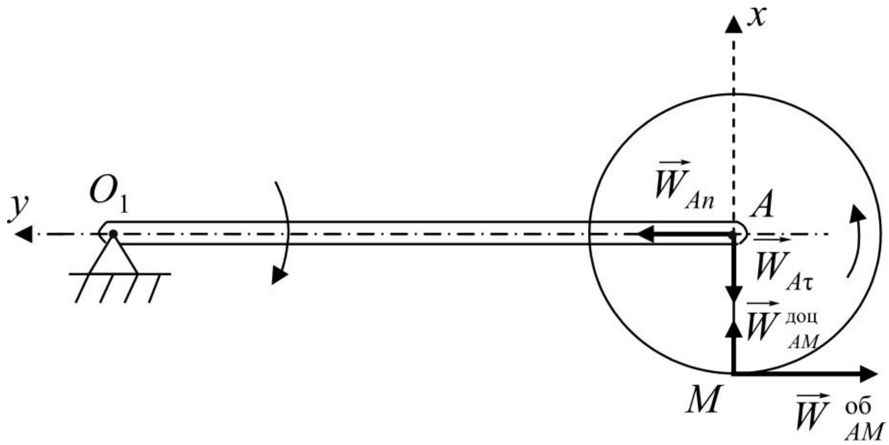


Рис. 5.15

Абсолютне прискорення точки M визначимо за його проекціями на осі координат:

$$w_{Mx} = w_{AM}^{\text{доц}} - w_{A\tau} = \omega_0^2 R - 3\varepsilon_0 R = R(\omega_0^2 - 3\varepsilon_0);$$

$$w_{My} = w_{An} - w_{AM}^{\text{об}} = 3\omega_0^2 R - \varepsilon_0 R = R(3\omega_0^2 - \varepsilon_0);$$

$$w_M = \sqrt{w_{Ax}^2 + w_{Ay}^2} = R\sqrt{(\omega_0^2 - 3\varepsilon_0)^2 + (3\omega_0^2 - \varepsilon_0^2)^2} =$$

$$= R\sqrt{10(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2) - 12\omega_0\varepsilon_0}\,.$$

Напрямок прискорення точки M визначають за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{w}_M, x}) = \frac{w_{Mx}}{w_M} = \frac{\omega_0^2 - 3\varepsilon_0}{\sqrt{10(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2) - 12\omega_0^2\varepsilon}};$$

$$\cos(\widehat{\vec{w}_M, y}) = \frac{w_{My}}{w_M} = \frac{3\omega_0^2 - \varepsilon_0}{\sqrt{10(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2) - 12\omega_0^2\varepsilon}}\,.$$

5.3. Питання для самоконтролю

1. Як визначається миттєво-поступальний та миттєво-обертальний рухи?
2. Який рух твердого тіла є складним?
3. Чим є абсолютний рух твердого тіла, що бере участь у кількох миттєвих обертальних рухах навколо осей, які перетинаються?
4. Чим є абсолютний рух твердого тіла, що бере участь у кількох миттєвих обертальних рухах навколо осей, які паралельні?
5. Що називають парою обертань?
6. Коли може мати місце пара кутових прискорень твердого тіла?
7. Як формулюється правило паралельного переносу вектора кутової швидкості твердого тіла?

8. У чому суть методу зупинення? Коли його доцільно застосовувати?
9. Як показати, що в загальному випадку просторовий рух твердого тіла зводиться до кінематичного гвинта?
10. Які є кінематичні інваріанти?
11. Чи мають кінематичні інваріанти аналоги в статиці?
12. Чи існує в кінематиці теорема про зведення системи до двох параметрів, аналогічно теоремі Пуансо? Як вона формулюється?
13. Що називають аксоїдами при синтезі рухів?

5.4. Тестові запитання та завдання

5.1

Рух тіла відносно нерухомої системи координат називається…..

5.2

Рух тіла відносно рухомої системи координат називається…..

5.3

Рух рухомої системи координат відносно нерухомої при складному русі тіла називається….

5.4

Якщо тіло одночасно приймає участь у декількох рухах, то говорять про …… рух тіла.

5.5

При додаванні поступальних рухів тіла маємо результуючий ….. рух тіла.

5.6

При додаванні обертальних рухів тіла навколо нерухомих осей, що перетинаються, маємо …… рух тіла.

5.7

У випадку додавання двох обертань тіла навколо однієї осі з рівними за модулем, але протилежними за напрямом кутовими швидкостями, маємо векторний…..

5.8

Сукупність двох обертань тіла навколо паралельних осей з рівними за модулем, але протилежними за напрямом кутовими швидкостями, називається…..

5.9

Пара обертань еквівалентна ……… руху тіла.

5.10

Кінематичний гвинт – це ……………….

5.11

Аналогами кінематичних інваріантів в статиці є …………

5.12

Пара обертань – це …………………

5.13

Швидкість поступального руху, якому еквівалентна пара обертань, дорівнює ….. ……. пари обертань.

5.14

Якщо модуль кутової швидкості, що входить в пару обертань дорівнює ω, а плече пари обертань дорівнює d, то швидкість поступального руху можна знайти за формулою:

A. $v = {}^{1}/_{2}\,\omega d$ B. $v = 0$ C. $v = \omega d$

5.15

Сукупність двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей, що не утворюють пару обертань, еквівалентна одному ………… руху.

5.16

Кутова швидкість обертального руху, еквівалентного сукупності двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей із кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ $і$ $\vec{\omega}_2$ $(\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2)$, дорівнює:

A. $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ B. $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ C. 0

5.17

Миттєва вісь обертання, якому еквівалента сукупність двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей, що не утворює пару обертань, поділяє відстань між осями складових обертань на частини, що обернено пропорційні модулям ……..………..

Рекомендуємо самостійно розв'язати задачі: 25.4; 25.9; 25.11; 25.18 24.19; 24.24 [4].

Розділ 6
Сферичний рух твердого тіла

6.1. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки

У процесі вивчення обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки (або сферичного) необхідно визначити характеристики руху тіла в цілому і характеристики руху його точок.

Виберемо нерухому систему координат $Oxyz$ з початком у нерухомій точці O і розглянемо рух тіла відносно цієї системи.

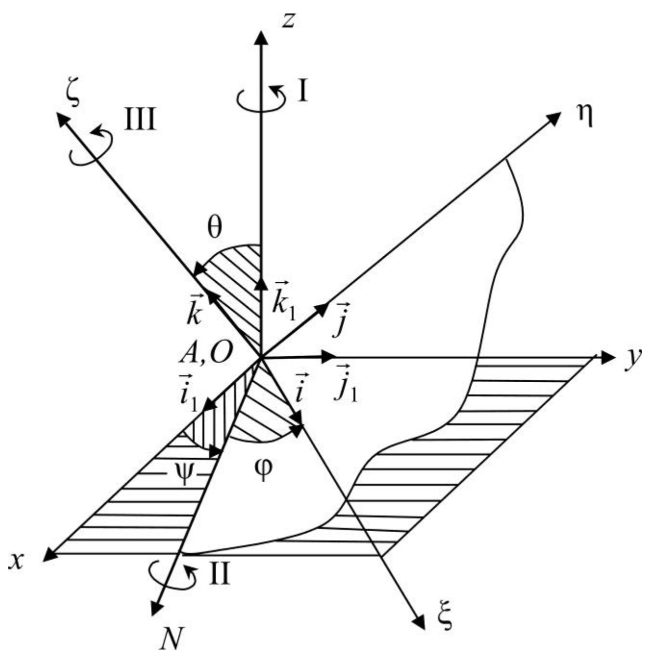


Рис. 6.1

З тілом незмінно пов'яжемо систему рухомих осей $O\xi\eta\zeta$ (рис. 6.1) з таким самим центром.

Положення тіла в просторі можна визначити, якщо буде відомо положення рухомої системи координат $O\xi\eta\zeta$ відносно нерухомої $Oxyz$.

Положення рухомої системи координат відносно нерухомої зручно визначати за допомогою трьох кутів Ейлера, оскільки за *теоремою Ейлера* переміщення твердого тіла з нерухомою точкою можна здійснити за допомогою трьох послідовних поворотів навколо трьох осей, які проходять через нерухому точку.

Перший поворот твердого тіла виконують навколо осі Oz на кут прецесії Ψ, другий поворот – навколо лінії вузлів на кут нутації θ, а третій поворот – навколо осі $O\zeta$ на кут власного обертання φ.

Кут прецесії Ψ – це кут між нерухомою віссю Ox і лінією вузлів ON, він вважається додатним, якщо поворот від Ox до ON з осі Oz видно проти годинникової стрілки. Кут прецесії лежить у нерухомій площині xy.

Кут нутації θ – це кут між віссю Oz і віссю $O\zeta$ і він вважається додатним, якщо видно обертання тіла з додатного напрямку лінії вузлів ON проти годинникової стрілки.

Кут власного обертання φ міститься в рухомій площині $\xi\eta$; це кут між лінією вузлів і віссю $O\xi$. Кут φ додатний, якщо його відкладено від ON до $O\xi$ проти годинникової стрілки.

Під час руху твердого тіла навколо нерухомої точки кути Ейлера змінюються за часом, тобто

$$\Psi = \Psi(t);\ \theta = \theta(t);\ \varphi = \varphi(t). \qquad (6.1)$$

Вирази (6.1) називають рівняннями обертального руху тіла навколо нерухомої точки. Наприклад, якщо розглядати рух вовчка (рис. 6.2), то кут прецесії Ψ визначить рух осі $O\zeta$ навколо осі Oz, кут нутації θ – відхилення осі $O\zeta$ від осі Oz, а кут φ – обертання вовчка навколо осі симетрії $O\zeta$.

У разі регулярної прецесії кут θ сталий і тоді вісь вовчка описує поверхню прямого кругового конуса.

6.2. Кутова швидкість та кутове прискорення тіла, яке обертається навколо нерухомої точки

Як відомо з теорії, в кожний момент часу рух тіла навколо нерухомої точки можна розглядати як обертальний навколо миттєвої осі, яка проходить через нерухому точку O з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 6.2)

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}}.$$

Проекції миттєвої кутової швидкості на осі нерухомої і рухомої систем координат визначають за кінематичними рівняннями Ейлера. Так, для нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin\Psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\Psi; \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos\Psi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\Psi; \qquad (6.2) \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\Psi}, \end{aligned}$$

а для рухомої системи координат:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\Psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi; \\ \omega_\eta &= \dot{\Psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi; \qquad (6.3) \\ \omega_\zeta &= \dot{\Psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

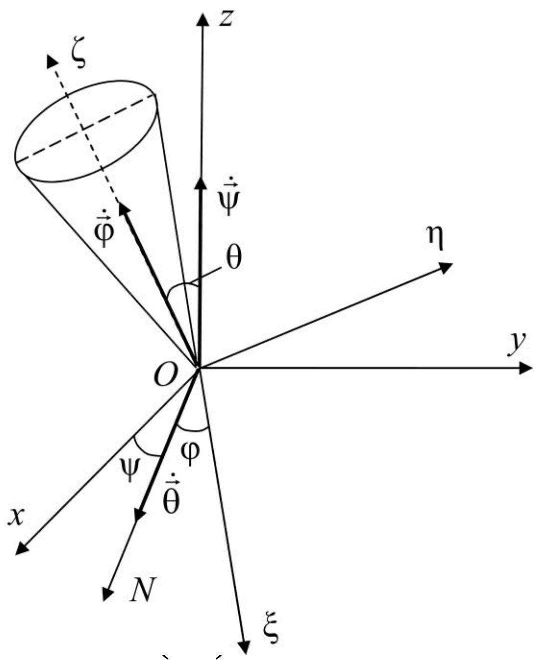


Рис. 6.2

Тоді миттєва кутова швидкість твердого тіла

$$\omega = \sqrt{\dot{\Psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\Psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \qquad (6.4)$$

Якщо $\theta = \mathrm{const}$, то маємо випадок регулярної прецесії. При цьому (рис. 6.3) $\vec{\omega} = \vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\varphi}}$,

де $\vec{\dot{\Psi}} = \vec{\omega}_e$ – переносна кутова швидкість; $\vec{\dot{\varphi}} = \vec{\omega}_r$ – відносна кутова швидкість.

Отже, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$.

Геометричне місце миттєвих осей обертання в нерухомій системі координат називають нерухомим аксоїдом. Геометричне місце миттєвих осей обертання в рухомій системі координат називають рухомим аксоїдом.

Рухомий і нерухомий аксоїди являють собою конічні поверхні зі спільною вершиною в нерухомій точці O (рис. 6.4).

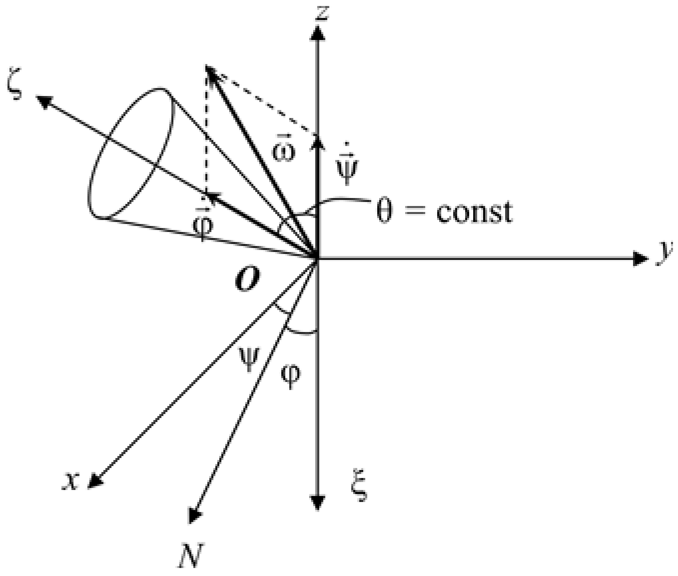


Рис. 6.3

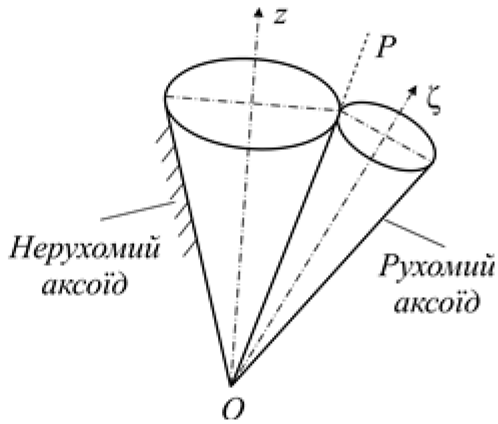


Рис. 6.4

У кожний момент часу рухомий і нерухомий аксоїди мають спільну твірну OP, яка є миттєвою віссю обертання.

Під час обертання тіла навколо нерухомої точки рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання (теорема Пуансо).

Положення миттєвої осі обертання визначають її рівняннями

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \tag{6.5}$$

де x, y, z – поточні координати миттєвої осі обертання, ω_x ,ω_y, ω_z – проекції миттєвої кутової швидкості на нерухомі осі.

Якщо ω_x ,ω_y, ω_z є функціями часу, то рівняння (6.5) представляють собою рівняння нерухомого аксоїда.

Аналогічно рівняння рухомого аксоїда мають вигляд

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}, \tag{6.6}$$

де ξ, η, ζ – поточні координати миттєвої осі обертання в рухомій системі координат; ω_ξ, ω_η, ω_ζ – проекції кутової швидкості на осі цієї системи координат.

Вектор миттєвої кутової швидкості обертання тіла напрямлено вздовж миттєвої осі обертання.

Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ у разі обертання тіла навколо нерухомої точки дорівнює похідній за часом від кутової швидкості

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлено по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$ (рис. 6.5). Як бачимо, $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ не напрямлено вздовж однієї прямої, а розміщено під деяким кутом один до одного (рис. 6.6). У випадку регулярної прецесії

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega} \text{ або} \qquad (6.7)$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r . \qquad (6.8)$$

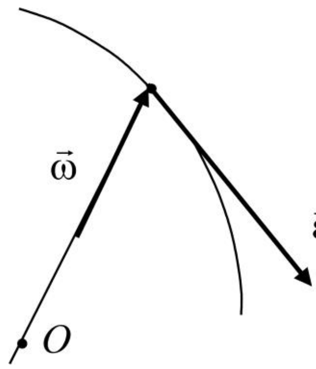


Рис. 6.5

Отже, кутове прискорення в цьому випадку виражається векторним добутком кутових швидкостей переносної та абсолютної або переносної і відносної.

Вибір використання виразу (6.7) або (6.8) залежить від того, між якими з цих векторів відомий кут.

Миттєве кутове прискорення можна визначити і за проекціями його на осі координат:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \ \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \ \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dz}; \ \varepsilon^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2. \qquad (6.9)$$

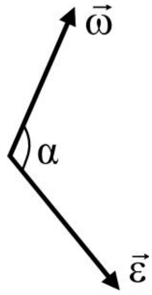


Рис. 6.6

Напрям $\vec{\varepsilon}$ знайдемо за напрямними косинусами.

6.3. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Знаючи положення миттєвої осі обертання, швидкість будь-якої точки *M* тіла можна визначити за формулою Ейлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де r – радіус-вектор точки, проведений з нерухомого центра *O* (рис. 6.7).

Швидкість точки

$$v = \omega R,$$

де R – відстань від точки до миттєвої осі обертання.

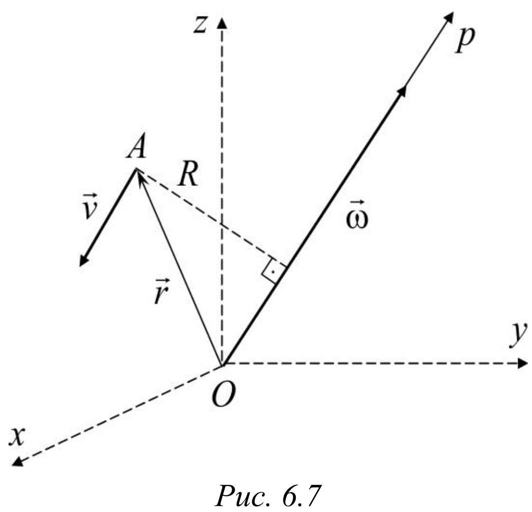


Рис. 6.7

Швидкість точки *M* можна визначити також за проекціями її на осі нерухомої системи координат:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y;$$

$$v_y = \omega_z x - \omega_x z;$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Модуль швидкості точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Напрям вектора швидкості визначають за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{v}, ox}) = \frac{v_x}{v};$$
$$\cos(\widehat{\vec{v}, oy}) = \frac{v_y}{v};$$
$$\cos(\widehat{\vec{v}, oz}) = \frac{v_z}{v}.$$

Прискорення точки M $\vec{w}_M$ дорівнює геометричній сумі доосьового і обертального прискорень:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{\text{ос}} + \vec{w}_M^{\text{об}}. \qquad (6.10)$$

Доосьове прискорення

$$w_{\text{М}}^{\text{ос}} = \omega^2 R,$$

де R – відстань від точки до миттєвої осі обертання. Це прискорення напрямлено вздовж перпендикуляра, опущеного з точки на миттєву вісь (рис. 6.8).

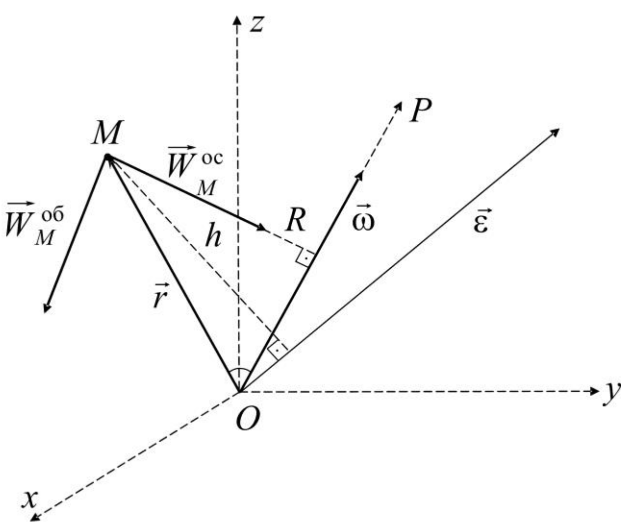


Рис. 6.8

Обертальне прискорення точки

$$w_M^{\text{об}} = \varepsilon h,$$

де h – відстань від точки до вектора кутового прискорення. Це прискорення направлене перпендикулярно до площини, в якій розміщені вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}$ в ту частину простору, звідки видно найменший поворот від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора $\vec{r}$ проти годинникової стрілки.

Модуль прискорення точки

$$w_M = \sqrt{(w_M^{\text{об}})^2 + (w_M^{\text{ос}})^2 + 2 w_M^{\text{об}} w_M^{\text{ос}} \cos(\widehat{\vec{w}_{\text{М}}^{\text{об}}; \vec{w}_{\text{М}}^{\text{ос}}})}.$$

У випадку регулярної прецесії прискорення точки M можна визначити за теоремою Коріоліса.

Під час розв'язування задач з кінематики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки можуть траплятися такі типи задач:

1. Задано рівняння руху у формі Ейлера як відомі функції часу

$$\Psi = \Psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t).$$

Необхідно визначити кутову швидкість та кутове прискорення твердого тіла, рівняння рухомого та нерухомого аксоїдів.

Розв'язувати задачі такого типу необхідно в такій послідовності:

а) визначити похідні від кутів Ейлера за часом;

б) знайти проекції кутової швидкості на осі рухомої і нерухомої систем координат;

в) визначити значення миттєвої кутової швидкості;

г) визначити проекції миттєвого кутового прискорення і його значення;

д) скласти рівняння рухомого і нерухомого аксоїдів.

2. Задано миттєву кутову швидкість і положення миттєвої осі обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Необхідно визначити миттєве кутове прискорення, швидкість і прискорення будь-якої точки твердого тіла.

Розв'язувати задачі такого типу слід у такій послідовності:

а) вибрати нерухому і рухому системи координат;

б) визначити швидкість точки твердого тіла та її напрямок;

в) визначити миттєве кутове прискорення і його напрямок;

г) визначити прискорення точки тіла згідно з наведеними вказівками.

3. Обернені задачі – за заданою швидкістю точки і положенням миттєвої осі обертання необхідно визначити миттєву кутову швидкість $\vec{\omega}$ та миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ тіла, а також визначити координати точки, що креслить годограф швидкості.

4. Задачі на додавання обертальних рухів навколо осей, які перетинаються в нерухомій точці. Один із рухів приймають за переносний, а другий – за відносний. Якщо через $\vec{\omega}_e$ позначити миттєву кутову швидкість переносного руху, через $\vec{\omega}_r$ – миттєву кутову швидкість відносного руху, а через $\vec{\omega}_a$ – миттєву кутову швидкість абсолютного руху, то

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e.$$

Таким чином, у результаті складання рухів отримаємо результуючий обертальний рух навколо нерухомої точки.

У цьому разі швидкість точки можна також визначити за теоремою про додавання швидкостей за складного руху:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

де $\vec{v}_a, \vec{v}_e$ і $\vec{v}_r -$ абсолютна, переносна і відносна швидкості точки.

Для визначення прискорення точки можна використовувати також теорему Коріоліса.

Задача 47

Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки (рис. 6.9) згідно з рівняннями Ейлера: $\Psi = 4t$; $\varphi = 30t$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ (кути вимірюють у радіанах, час – у секундах). Визначити миттєву кутову швидкість тіла, його миттєве кутове

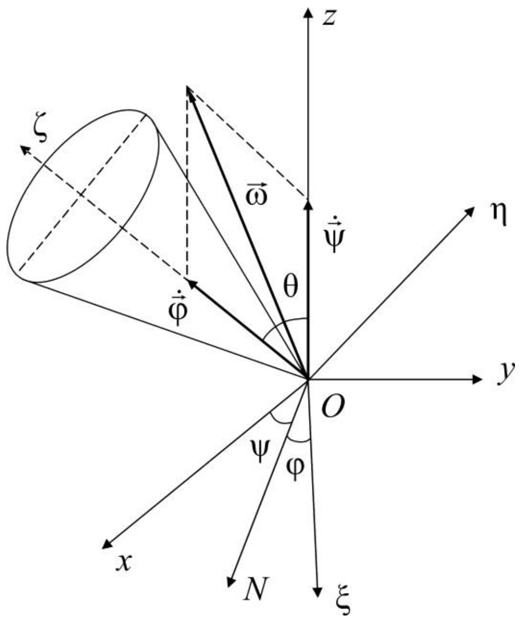


Рис. 6.9

прискорення, скласти рівняння нерухомого і рухомого аксоїдів, якщо координати точки M у рухомій системі такі: $\xi = 2$ см; $\eta = 2$ см; $\zeta = 10$ см.

Розв'язання

Вибираємо дві системи координат з початком у нерухомій точці O: рухому $O\xi\eta\zeta$ і нерухому $Oxyz$. Оскільки $\theta = \text{const}$, то маємо випадок регулярної прецесії.

Обчислимо перші похідні за часом від кутів Ейлера: $\dot{\Psi} = 4$; $\dot{\varphi} = 30$; $\dot{\theta} = 0$.

Отже, $\vec{\omega} = \vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\varphi}}$.

Користуючись формулами (6.2), обчислимо проекції миттєвої кутової швидкості на осі нерухомої системи координат:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\Psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\Psi = 30\sin 4t\sin\frac{\pi}{4} = 15\sqrt{2}\sin 4t;$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\cos\Psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\Psi = -30\cos 4t\sin\frac{\pi}{4} = -15\sqrt{2}\cos 4t;$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\Psi} = 30\cos\frac{\pi}{4} + 4 = 15\sqrt{2} + 4 = 25{,}15.$$

Визначимо проекції миттєвої кутової швидкості на осі рухомої системи координат за виразами (6.3):

$$\omega_\xi = \dot{\Psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi = 4\sin\frac{\pi}{4}\sin 30t = 2\sqrt{2}\sin 30t;$$

$$\omega_\eta = \dot{\Psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi = 4\sin\frac{\pi}{4}\cos 30t = 2\sqrt{2}\cos 30t;$$

$$\omega_\zeta = \dot{\Psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = 4\cos\frac{\pi}{4} + 30 = 2\sqrt{3} + 30 = 32{,}82.$$

Миттєву кутову швидкість визначаємо за формулою (6.4):

$$\omega = \sqrt{\dot{\Psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\Psi}\dot{\varphi}\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 30^2 + 2\cdot 4\cdot\frac{30}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{1075{,}2} = 32{,}79 \text{ рад/с}.$$

Проекції миттєвого кутового прискорення визначаємо за формулою (6.9):

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x = 60\sqrt{2}\cos 4t;$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y = -60\sqrt{2}\sin 4t;$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0.$$

Миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = 60\sqrt{2}\ \text{рад/с}.$$

Напрям миттєвого кутового прискорення визначимо за напрямними косинусами:

$$\cos(\varepsilon \hat{,} Ox) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} = \cos 4t;$$

$$\cos(\varepsilon \hat{,} Oy) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} = -\sin 4t;$$

$$\cos(\varepsilon \hat{,} Oz) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} = 0.$$

Отже, миттєве кутове прискорення напрямлено вздовж лінії вузлів ON.

Рівняння миттєвої осі в нерухомій системі координат згідно з рівнянням (6.5)

$$\frac{x}{15\sqrt{2}\sin 4t} = \frac{y}{-15\sqrt{2}\cos 4t} = \frac{z}{25{,}15}.$$

Рівняння миттєвої осі в рухомій системі координат згідно з рівнянням (6.6)

$$\frac{\xi}{2\sqrt{2}\sin 30t} = \frac{\eta}{2\sqrt{2}\cos 30t} = \frac{\zeta}{32{,}82}.$$

Із цих рівностей знайдемо рівняння рухомого і нерухомого аксоїдів, вилучивши час t.

Рівняння нерухомого аксоїда

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{15\sqrt{2}\,z}{25{,}15}\right)^2 = 0.$$

Рівняння рухомого аксоїда

$$\xi^2 + \eta^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}\,\zeta}{32{,}82}\right)^2 = 0.$$

Задача 48

Конус A оббігає 180 разів за хвилину нерухомий конус B (рис. 6.10). Висота рухомого конуса A $OO_1 = 20$ см. Визначити: 1) переносну, відносну та абсолютну кутові швидкості конуса; 2) його миттєве кутове прискорення; 3) швидкість та прискорення точки C конуса.

Розв’язання

Обертальний рух конуса A навколо нерухомої точки O в даний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвої осі OP, оскільки швидкості точок O і C в цей момент часу дорівнюють нулю. Положення миттєвої осі обертання (вісь OP) визначаємо за теоремою Пуансо.

Рух конуса можна розкласти на два обертальні рухи: переносний навколо осі Oz і відносний навколо осі OO_1. Ці рухи мають різні напрямки.

Оскільки конус обертається рівномірно навколо осі Oz, то його переносна кутова швидкість

$$\omega_e = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \cdot 180}{60} = 6\pi \text{ рад/с},$$

де N – кількість обертів.

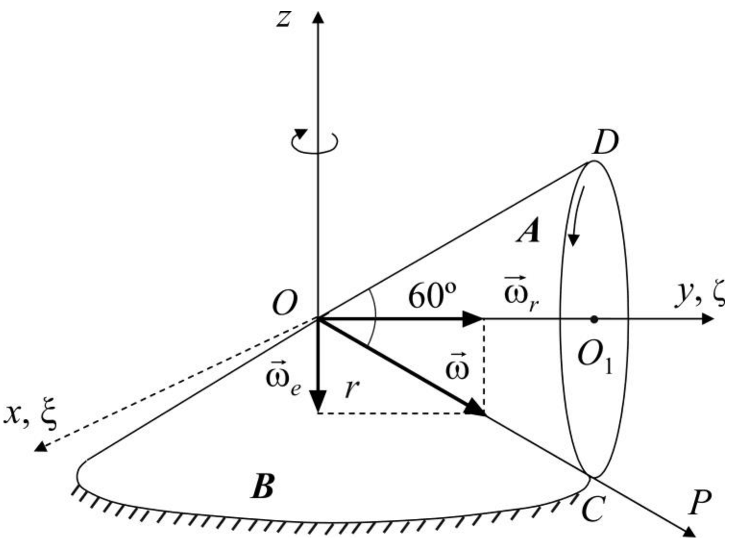


Рис. 6.10

Переносна кутова швидкість $\vec{\omega}_e$ напрямлена вздовж осі Oz.

Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ напрямлена вздовж OC. З умови задачі відомий напрямок відносної кутової швидкості $\vec{\omega}_r$.

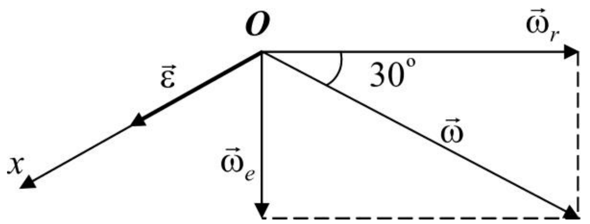


Рис. 6.11

Побудувавши паралелограм кутових швидкостей (рис. 6.11), визначимо модуль і напрямок миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$, модуль відносної кутової швидкості і напрямок переносної кутової швидкості.

Отже,

$$\omega = \frac{\omega_e}{\cos 60°} = \frac{6\pi}{\frac{1}{2}} = 12\pi \text{ рад/с};$$

$$\omega_r = \omega \cos 30° = 12\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,\pi \text{ рад/с}.$$

Оскільки вісь конуса OO_1 утворює з віссю Oz сталий кут $\theta = 90°$, то тут маємо випадок регулярної прецесії. Тому миттєве кутове прискорення обчислимо за формулою (6.7)

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega},$$

його модуль

$$\varepsilon = \omega_e \omega \sin 60° = 6\pi 12\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\,\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлено вздовж осі Ox.

Швидкість точки C $v_C = 0$, оскільки точка C належить миттєвій осі обертання.

Прискорення точки C можна знайти двома способами.

1. Перший спосіб визначення w_C. Прискорення точки C знайдемо за формулою (6.10):

$$\vec{w}_C = \vec{w}_C^{\text{ос}} + \vec{w}_C^{\text{об}},$$

де $\vec{w}_C^{\text{ос}} = 0$, оскільки миттєвий радіус обертання точки C навколо миттєвої осі дорівнює нулю:

$$w_C^{\text{об}} = \varepsilon\, OC = 36\sqrt{3}\,\pi^2 \frac{40}{\sqrt{3}} = 1440\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

де $OC = \dfrac{OO_1}{\cos 30°} = \dfrac{20 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ см.

Вектор $\vec{w}_C^{\text{об}}$ напрямлено перпендикулярно до OC (рис. 6.12, *а*).

Отже, $\vec{w}_C = \vec{w}_C^{\text{об}}$ і $w_C = 1440\pi^2$ см/с^2.

2. Другий спосіб визначення прискорення точки C. Оскільки розглядаємо випадок регулярної прецесії, то прискорення точки C можна визначити, користуючись теоремою Коріоліса:

$$\vec{w}_{aC} = \vec{w}_{eC} + \vec{w}_{rC} + \vec{w}_{cC}\ .$$

Кутові швидкості складових рухів сталі за модулем, тому прискорення w_{eC} і w_{rC} дорівнюють нормальним прискоренням у відповідних рухах. Для переносного прискорення точки

$$w_{Ce} = \omega_e^2 r = \omega_e^2 OC \cos 30° = 36\pi^2 \frac{40}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 720\pi^2 \text{ рад/с},$$

де r – відстань від точки C до осі Oz (рис. 6.12, *а*).

Переносне прискорення точки $\vec{w}_{eC}$ напрямлене вздовж радіуса до осі обертання Oz (рис. 6.12, *б*).

Відносне прискорення точки

$$w_{rC} = \omega_r^2\, O_1C = (6\sqrt{3}\pi)^2 \frac{20}{\sqrt{3}} = 720\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

де $O_1C = OO_1 \text{tg} 30° = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ см і $\vec{w}_{rC}$ напрямлений уздовж CO_1 до осі OO_1.

Прискорення Коріоліса

$$w_{Cc} = 2\omega_e v_r \sin 90° = 2 \cdot 6\pi \cdot 120\pi = 1440\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

де v_r – швидкість точки C у відносному русі, вектор її напрямлено перпендикулярно до O_1C (рис. 6.12, *б*);

$$v_r = \omega_r O_1C = 6\sqrt{3}\pi \frac{20}{\sqrt{3}} = 120\pi \text{ см/с}.$$

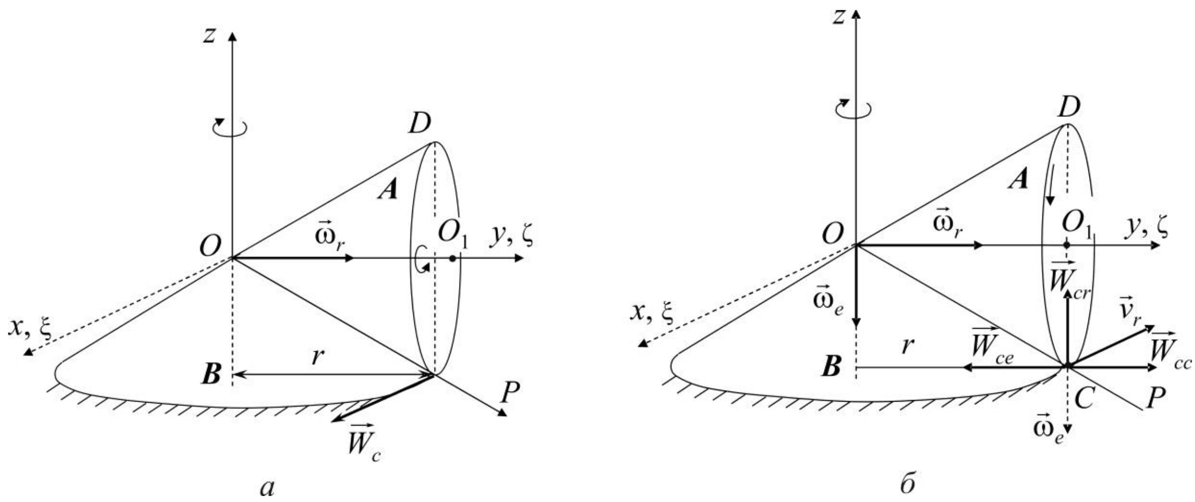


Рис. 6.12

Прискорення Коріоліса напрямлене перпендикулярно до площини, в якій розміщені вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ і паралельно осі Oy в напрямку осі Oy.

Проекції абсолютного прискорення на осі координат Oy і Oz:

$$w_{aCy} = -w_{Ce} + w_{Cc} = -720\pi^2 + 1440\pi^2 = 720\pi^2,$$

$$w_{aCz} = w_{rC} = 720\sqrt{3}\pi^2,$$

тоді абсолютне прискорення точки C

$$w_{aC} = \sqrt{(720\pi^2)^2 + (720\sqrt{3}\pi^2)^2} = 720\pi^2\sqrt{4} = 1440\pi^2 \text{ см/с}.$$

Порівнюючи обидва способи визначення прискорення точки твердого тіла в обертальному русі навколо нерухомої точки, робимо висновок, що перший спосіб більш простий і потребує менше часу порівняно з другим, де застосовували теорему Коріоліса.

Задача 49

Диск радіусом $OB = 4\sqrt{3}$ см обертається навколо нерухомого конуса з кутом при вершині 60° (рис. 6.13). Визначити миттєву, переносну і відносну кутові швидкості конуса, якщо прискорення точки B стале і дорівнює 48 см/с^2.

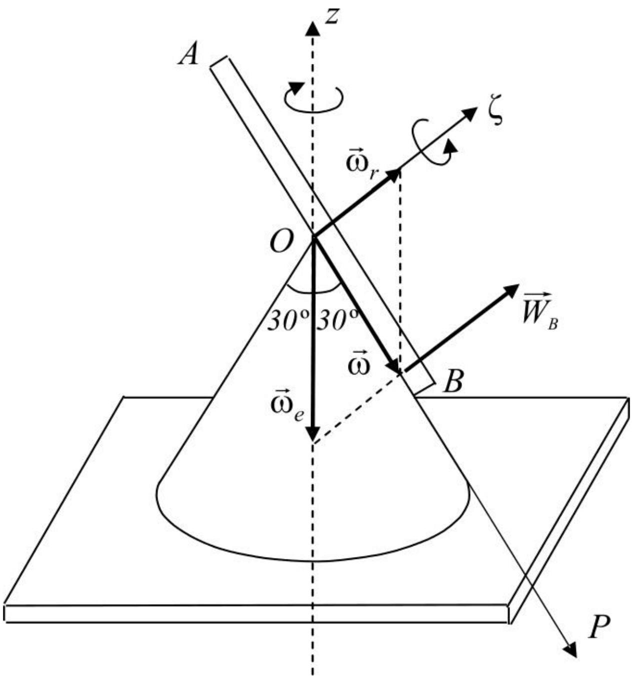


Рис. 6.13

Розв'язання

Розглядаючи обертальний рух диска навколо нерухомої точки O, робимо висновок, що OB – миттєва вісь обертання.

Відносним рухом диска є його рух навколо осі $O\zeta$. Переносним рухом є рух навколо осі Oz.

Прискорення $\vec{w}_B = \vec{w}_{OB}^{\text{об}}$, оскільки доосьове прискорення $\vec{w}_{OB}^{\text{ос}} = 0$, тому що точка B належить миттєвій осі обертання.

Отже, маємо $w_{\text{в}} = \varepsilon\, OB$, звідки визначимо, що

$$\varepsilon = \frac{w_{\text{в}}}{OB} = \frac{48}{4\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ рад/с}^2.$$

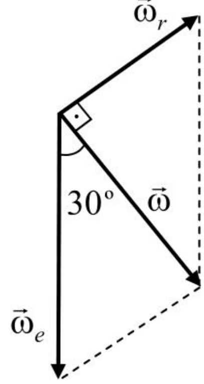


Рис. 6.14

Оскільки розглядаємо випадок регулярної прецесії, то

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}.$$

За модулем $\varepsilon = \omega_e\, \omega \sin(\omega_e \hat{,} \omega)$.

Побудуємо паралелограм кутових швидкостей (рис. 6.14), беручи до уваги, що $\vec{\omega}$ напрямлено вздовж OB, а ω_r – уздовж осі $O\zeta$, як показано на рис. 6.13.

З рис. 6.14 маємо:

$$\omega_e = \frac{\omega}{\cos 30°}.$$

Тоді $\varepsilon = \frac{\omega^2}{\cos 30°} \sin 30° = \omega^2 \operatorname{tg} 30°$, звідки $\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} 30°}} = \sqrt{\frac{12\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} =$

$= 2\sqrt{3}$ рад/с.

Отже, переносна кутова швидкість тіла

$$\omega_e = \frac{\omega}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 4 \text{ рад/с}.$$

Відносна кутова швидкість тіла

$$\omega_r = \omega \operatorname{tg} 30° = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \text{ рад/с}.$$

Напрямки кутових швидкостей показано на рис. 6.14.

Миттєве кутове прискорення диска направлене перпендикулярно до площини, яку утворюють вектори $\vec{\omega_e}$ і $\vec{\omega}$ в напрямку до нас.

Задача 50

Диференціальна передача складається з конічного зубчастого колеса III (сателіта), вільно насадженого на кривошип OA, який може обертатися навколо нерухомої осі CD (рис. 6.15).

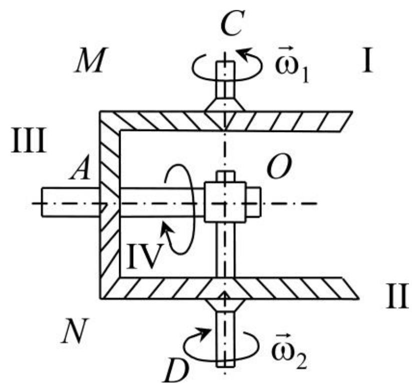


Рис. 6.15

Сателіт з'єднано з конічними зубчастими колесами I і II, що обертаються навколо осі *CD* з кутовими швидкостями $\omega_1 = 7$ рад/с і $\omega_2 = 3$ рад/с, що мають різні напрями. Радіус сателіта r = 2,5 см, а радіуси коліс I і II R = 5 см. Визначити кутову швидкість ω_3 сателіта, кутову швидкість кривошипа ω_4, швидкість точки *A*.

Розв'язання

I. *Розглянемо задачу за допомогою додавання обертань складових рухів.*

Колесо I обертається навколо нерухомої осі *CD* зі сталою кутовою швидкістю ω_4. Отже, швидкість будь-якої його точки, наприклад точки *M*, буде перпендикулярною до радіуса *R*:

$$v_M = \omega_1 R = 7 \cdot 5 = 35 \text{ рад/с}.$$

Швидкість точки *N* колеса II під час обертання навколо осі *CD*

$$v_N = \omega_2 R = 3 \cdot 5 = 15 \text{ см/с}.$$

Вектор швидкості точки *N* перпендикулярний до радіуса колеса II.

Якщо розглядати складний рух сателіта, який складається з переносного обертального руху навколо осі *OD* з кутовою швидкістю $\omega_e = \omega_4$ і відносного обертального руху навколо кривошипа *OA* з кутовою швидкістю $\omega_r = \omega_3$, то абсолютні швидкості його точок *M* і *N* дорівнюватимуть знайденим швидкостям v_M і v_N, але вектори $\vec{v}_M$ і $\vec{v}_N$ будуть мати різні напрямки, оскільки рухи коліс I і II відбуваються в різних напрямках.

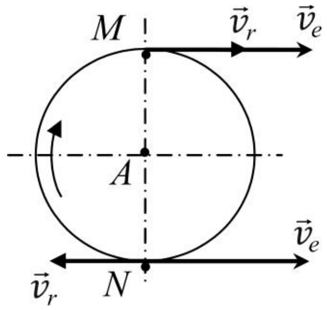


Рис. 6.16

За теоремою про додавання швидкостей маємо:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{Me} + \vec{v}_{Mr};$$
$$\vec{v}_N = \vec{v}_{Ne} + \vec{v}_{Nr}.$$

Зображуючи схему розподілу швидкостей у сателіті (рис. 6.16), робимо висновок, що

$$v_M = v_{Me} + v_{Mr};$$
$$v_N = v_{Ne} - v_{Nr}.$$

Оскільки $v_{Me} = v_{Ne} = \omega_e R = 5\omega_e$; $v_{Mr} = v_{Nr} = \omega_r r = 2{,}5\omega_r$, то $35 = 5\omega_e + 2{,}5\omega_r$; $15 = -5\omega_e + 2{,}5\omega_r$,
звідки

$$\omega_3 = \omega_r = 10 \text{ рад/с};$$
$$\omega_4 = \omega_e = 2 \text{ рад/с}.$$

Оскільки точка *A* належить кривошипу, то її швидкість

$$v_A = \omega_4 R = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см/с}.$$

2. *Цю задачу можна розв'язати, визначаючи положення миттєвої осі обертання.* Розглянемо рух сателіта як обертальний рух навколо нерухомої точки *O*. Відомо, що положення миттєвої осі можна визначити двома точками, швидкості

яких у певний момент часу дорівнюють нулю. Однією з таких точок є точка O. Положення другої точки P (рис. 6.17) знайдемо, знаючи швидкості M і N сателіта, з пропорції $\frac{v_M}{v_N} = \frac{MP}{NP}$, але $NP = 2r - MP$, тоді: $\frac{35}{15} = \frac{MP}{2r - MP}$; $7 \cdot 2r - 7MP = 3MP$; $35 = 10MP$, звідки отримуємо, що $MP = 3{,}5$ см, а $AP = 3{,}5 - 2{,}5 = 1$ см.

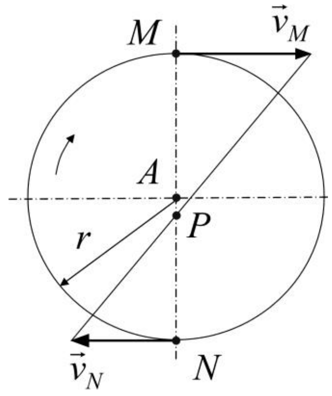


Рис. 6.17

Швидкість v_A можна знайти з пропорції

$$\frac{v_A}{v_M} = \frac{AP}{MP}.$$

Отже,

$$v_A = \frac{v_M \mathrm{AP}}{MP} = \frac{35 \cdot 1}{3{,}5} = 10 \text{ см/с}.$$

Знаючи швидкість точки A, знаходимо кутову швидкість кривошипа:

$$\omega_4 = \frac{v_A}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ рад/с}.$$

Визначимо кутову швидкість сателіта:

$$\omega_3 = \frac{v_M}{MP} = \frac{35}{3{,}5} = 10 \text{ рад/с}.$$

Рекомендуємо самостійно розв’язати задачі: 24.19; 24.24; 25.4; 25.9; 25.11; 25.18 [4].

6.4. Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають сферичним?
2. Чому обертальний рух навколо нерухомої точки називають сферичним?
3. Що представляють собою кути Ейлера?
4. Чи залежить положення твердого тіла від послідовності кутів повороту?
5. В якій послідовності відбуваються повороти на кути Ейлера?
6. Що називають миттєвою віссю обертання?
7. Які є способи визначення миттєвої осі обертання твердого тіла?
8. Як визначається миттєва кутова швидкість тіла при сферичному русі?
9. Як виразити проекції вектора кутової швидкості через кути Ейлера та їх похідні?
10. Як виразити проекції вектора кутового прискорення через кути Ейлера та їх похідні?

11. Як визначити положення миттєвої осі прискорень?
12. За якою теоремою визначаються прискорення точок при сферичному русі?
13. Що представляє собою випадок регулярної прецесії?

6.5. Тестові запитання та завдання

6.1

Кількість параметрів, що визначають положення тіла з нерухомою точкою, дорівнює….

6.2

Якщо положення тіла з нерухомою точкою O задається кутами ψ, ϑ, φ, то кінематичні рівняння руху тіла мають вигляд:

A. $\psi = \psi(t),\ \ \vartheta = \vartheta(t),\ \ \varphi = \varphi(t)$

B. $\dot{\psi} = \dot{\psi}(t),\ \ \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t),\ \ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$

C. $\xi_0 = \xi_0(t),\ \ \eta_0 = \eta_0(t),\ \ \varphi = \varphi(t)$

6.3

Укажіть правильну послідовність кутів Ейлера

A. ψ, φ, ϑ B. φ, ψ, ϑ C. ϑ, φ, ψ D.ψ, ϑ, φ

6.4

Довільне переміщення тіла навколо нерухомої точки можна здійснити …….. послідновними поворотами тіла навколо осей, що проходять через нерухому точку.

6.5

У випадку сферичного руху тіла вектор $\vec{\omega}$ записаний у вигляді $\vec{\omega} = e\vec{\omega}$, де $\vec{e}$ - одиничний вектор. Вкажіть відсутню складову у формулі $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{e} + \cdots$

A. $\frac{d^2\omega}{dt^2}\vec{e}$ B. $\omega\frac{d\vec{e}}{dt}$ C. 0

6.6

Якщо орти осей, навколо яких виконується повороти тіла на кути ψ, ϑ, φ, позначити відповідно через $\vec{k}, \vec{n}, \vec{e}$, то вектор кутової швидкості тіла можна записати у вигляді:

A. $(\dot{\psi}\vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{n}) \times \dot{\varphi}\vec{e}$ B. $\dot{\psi}\vec{n} + \dot{\vartheta}\vec{e} + \dot{\varphi}\vec{k}$ C.$\dot{\psi}\vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{e}$

6.7

У випадку сферичного руху тіла доосьове прискорення $\vec{w}_M^{\text{об}}$ напрямлене до ….. осі обертання.

6.8

Вкажіть відсутній рядок у формулі: $\vec{v}_{\mathrm{M}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$, що визначає швидкість точки M у випадку сферичного руху тіла.

A. $\begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

6.9

Вкажіть відсутній рядок у формулі: $\vec{v}_{\mathrm{M}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & y & z \end{vmatrix}$, що визначає швидкість точки M у випадку сферичного руху тіла.

A. $\begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

6.10

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то проекція на вісь Ox системи координат Oxy, що зв'язана з тілом, швидкості точки з координатами x, y, z дорівнює:

A. $\omega_z x - \omega_x z$ B. $\omega_y z - \omega_z y$ C. $x\omega_x$

6.11

Якщо тіло обертається навколо нерухомої точки із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то проекція на вісь Oy системи координат $Oxyz$, що зв'язана з тілом, швидкості точки з координатами x, y, z дорівнює:

A. $\omega_z x - \omega_x z$ B. $\omega_y z - \omega_z y$ C. $y\omega_y$

6.12

Вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований по ……. до годографа вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$

6.13

У випадку сферичного руху тіла вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований перпендикулярно до вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, якщо ω є величиною.

A. сталою B. змінною C. будь-якою

6.14

У випадку сферичного руху тіла ($\vec{\omega}$- вектор кутової швидкості, $\vec{\varepsilon}$ -вектор кутового прискорення)

A. $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ завжди коленіарні

B. $\vec{\varepsilon}$ завжди перпендикулярний до $\vec{\omega}$

C. $\vec{\varepsilon}$ може займати довільне положення відносно вектора $\vec{\omega}$

6.15

Якщо у випадку сферичного руху тіла сталий за величиною вектор кутової швидкості тіла $\vec{\omega}$ обертається в просторі із кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, то кутове прискорення тіла $\vec{\varepsilon}$ можна обчислити за формулою:

A. $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ B. $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ C. $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega}$ D. $\vec{\varepsilon} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$

6.16

У випадку сферичного руху тіла співвідношення $\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}$ має місце, якщо вісь Ox

A. обов'язково нерухома

B. обов'язково рухома

C. може бути як рухома, так і нерухома

6.17

Якщо тіло здійснює регулярну процесію, то вектор

A. $\vec{\varepsilon} = 0$

B. $\vec{\varepsilon}$ коленіарний з вектором $\vec{\omega}$

C. $\vec{\varepsilon}$ перпендикулярний до вектора $\vec{\omega}$

6.18

У випадку сферичного руху тіла вектори обертального $\vec{W}_{OM}^{\text{об}}$ і до осьового прискорень $\vec{W}_{OM}^{\text{ос}}$

A. завжди коленіарні

B. завжди взаємно перпендикулярні

C. можуть займати один відносно другого довільне положення

6.19

Вкажіть вираз для обертального прискорення М тіла, що обертається навколо нерухомої точки O :

A. $\vec{W}_{OM}^{\text{об}} = \vec{r} \times \vec{\varepsilon}$ B. $\vec{W}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ C. $\vec{W}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

6.20

Вкажіть проекцію на вісь Ox обертального прискорення точки M, що обертається навколо нерухомої точки O, якщо кутове прискорення тіла $\vec{\varepsilon}$, а точка M має координати x, y, z:

A. $\varepsilon_y z - \varepsilon_z y$ B. $\varepsilon_x x$ C. $\varepsilon_y x - \varepsilon_z y$

Список літератури

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: підруч. / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка. [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Міщук Г.Я., Штефан Н.І. – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – Режим доступу: http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/859
3. Міщук Г.Я. Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка: навч. посіб. / Г. Я. Міщук, Н. І. Штефан. – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – 196 с.
4. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: учебн. пособ. / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
5. Теоретична механіка: Збірник задач: навч. посіб. / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; за ред. М.А. Павловського. – Київ : Техніка, 2007. – 400 с.
6. Штефан Н.І. Теоретична механіка. Статика. Кінематика [Електронний ресурс] : конспект лекцій / Н. І. Штефан., О. С. Апостолюк. – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – Назва з екрана. – Режим доступу : http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/514
7. Штефан Н.І. Теоретична механіка. Предмет теоретичної механіки [Електронний ресурс] : метод. вказівки / Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. − Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – Назва з екрана. – Режим доступу : http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/478
8. Штефан Н.І. Теоретична механіка. Кінематика точки [Електронний ресурс] : метод. вказівки / Н. І. Штефан. – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – Назва з екрана. – Режим доступу: http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/442
9. Штефан Н.І. Теоретична механіка. Статика. Кінематика [Електронний ресурс] : метод. вказівки / Н. І. Штефан, В. М. Федоров. – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – Назва з екрана. – Режим доступу: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/2482
10. Штефан Н.І. Дистанційний курс. Курс лекцій: Статика. Кінематика / Н.І.Штефан, О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – Назва з екрана – Режим доступу: http://moodle.udec.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591